

ORSAY

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE ORSAY

THÈSE

Présentée
pour obtenir

Le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité Physique Théorique

Par

Nicolas REGNAULT

SUJET :

**Solutions exactes de la gravité réduite.
Effet Hall quantique de spin.**

Soutenue le 13 février 2002 devant la Commission d'examen

Olivier Babelon, rapporteur
Denis Bernard, directeur de thèse
Vladimir Dotsenko, rapporteur
Krzysztof Gawedzki
Stéphane Ouvry, président du jury

Remerciements

Ce mémoire est la synthèse de mes trois années de thèse passées à Saclay au Service de Physique Théorique du Commissariat à l’Energie Atomique. Ces travaux furent menés sous la direction de Denis Bernard. Ce manuscrit est pour moi l’occasion de lui exprimer toute ma gratitude. Il m’a aidé à faire mes premiers pas dans la recherche et a toujours su rester patient vis-à-vis de mes questions qui n’ont pas toujours été des plus pertinentes.

J’exprime tout ma gratitude au président du jury Stéphane Ouvry pour sa lecture minutieuse de ce rapport et ses nombreuses remarques constructives. Je remercie Olivier Babelon et Vladimir Dotsenko d’avoir accepté d’être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Krzysztof Gawedzki pour sa participation au jury de thèse.

Je remercie les deux directeurs successifs du SPHT, Jean Zinn-Justin et Jean-Paul Blaizot, de m’avoir accueilli au sein de leur laboratoire. Je suis reconnaissant envers Claude Delalande du Laboratoire de Physique de la Matière Condensée de l’E.N.S., pour m’avoir aidé à obtenir un poste d’ATER et ainsi m’avoir permis de terminer la rédaction de ma thèse dans d’excellentes conditions.

Ne pas avoir à se soucier des contingences matérielles et administratives constitue un atout non-négligeable dans la vie d’un thésard. A ce titre, je suis particulièrement reconnaissant envers Sylvie Zaphanella et Jean-Marie Normand.

Je tiens à saluer les thésards du laboratoire et plus particulièrement mes collègues de bureau Gregory, Thomas et Urko. La bonne ambiance régnant dans ce groupe constitue un soutien moral important, et les nombreuses discussions scientifiques sur des sujets variés permettent de garder un esprit ouvert aux diverses problématiques de la physique théorique.

Lorsque le ciel s’obscurcit, il est bon de trouver au loin une lumière pour garder le cap. A cet égard, je remercie Marc Bocquet et Thierry Jolicoeur d’avoir été présents dans les moments difficiles.

Je dédie ce manuscrit à ma femme Virginie. Sans son soutien quotidien depuis le début de mes études, il m’aurait été impossible d’écrire cette thèse.

Préambule

Au cours de ces trois années de thèse, j'ai eu l'occasion d'être confronté à trois thèmes de recherche de la physique théorique.

Mes recherches abordent tout d'abord le problème de la gravité dans le vide, réduite à deux dimensions (que nous appellerons plus brièvement gravité réduite). Ces travaux furent menés sous la direction de mon directeur de thèse Denis Benard et occupèrent un peu plus d'un an et demi. De par le temps consacré à ce sujet, quatre chapitres y seront dédiés.

Plus de quatre-vingts ans après la découverte de la relativité générale et de la mécanique quantique, l'expression de la gravité quantique reste encore un des plus grands défis de la physique du 21^{ème} siècle. L'engouement pour la théorie des cordes est une preuve de l'activité de ce domaine. A côté de cette voie principale de recherche se sont développées d'autres méthodes. Parmi celles-ci, l'étude de domaines des solutions de la relativité par des méthodes de quantification plus standards est une des possibilités. A ce titre, la gravité réduite est sûrement le secteur le plus intéressant. Bien qu'elle suppose que la métrique ne dépend que de deux variables, elle décrit un nombre important de solutions ayant un grand intérêt physique, dont les plus célèbres. Elle possède de plus un groupe de symétrie infini qui est à l'origine de son intégrabilité : l'orbite d'une solution sous ce groupe décrivant tout l'espace des solutions. L'idée est donc d'employer les techniques habituelles des systèmes intégrables pour arriver à quantifier le système.

Mes travaux sont dans le prolongement de cette voie et s'appuient sur la découverte d'une nouvelle paire de Lax pour exprimer les équations de la gravité réduite. Grâce à cette dernière et aux transformations d'habillage qu'il est possible de lui associer, les éléments de la métrique s'expriment à l'aide de fonctions τ qui peuvent être évaluées par des déterminants. La résolution du problème de Riemann-Hilbert est obtenue en utilisant la relation de dualité de Kramer-Neugebauer.

Fort de ce succès, il paraît intéressant d'appliquer cette paire de Lax à l'étude de la structure symplectique, préalable à toute quantification du système. La théorie combine deux difficultés : elle est non-ultralocale et possède trois contraintes. Malgré cela, les crochets de Poisson pour la paire de Lax prennent une forme simple avec deux matrices r où toute la dépendance dans les coordonnées est factorisée. Plus remarquable encore, les équations de Yang-Baxter modifiées ne font intervenir que de purs c -nombres.

L'utilisation de conditions aux limites permet de résoudre des difficultés liés à la non-ultralocalité et de déterminer les observables classiques. Mais un certain nombre de problèmes techniques empêchent pour l'instant d'obtenir l'algèbre des observables, dernière étape pour pouvoir aller au-delà du modèle classique.

Je me suis ensuite tourné vers des problèmes liés à la matière condensée et plus particulièrement vers l'étude de l'effet quantique de spin. Ce dernier est l'équivalent de l'effet Hall quantique pour les excitations portant le spin dans certains types de supraconducteurs. Bien

que l'explication du phénomène de délocalisation soit bien connue, il n'existe pour l'instant aucun modèle analytique reproduisant quantitativement les transitions entre plateaux et en particulier l'exposant critique.

Un des modèles discrets semi-classiques célèbres essayant de reproduire ce phénomène est celui de Chalker-Coddington. Parmi les extensions possibles de ce dernier, il est possible de considérer des degrés de liberté de spin. Le choix de l'algèbre pour ces spins est tel que l'hamiltonien appartienne à une des classes de symétrie dans la classification de Altland-Zirnbauer. Pour que l'hamiltonien ait une invariance particule-trou, il est nécessaire de considérer l'algèbre $sp(2N)$. L'idée est alors de prendre un nombre élevé de ces composantes de spin pour pouvoir faire des développements en gradient pour des modèles sigma dans une direction attractive dans l'espace des constantes de couplage, et ainsi obtenir un modèle effectif dans la limite infrarouge. Malheureusement, pour le cas présent, ce modèle correspond à un modèle de couplage fort.

Ma contribution à cette collaboration avec Denis Bernard et Didina Serban consista essentiellement à étudier le groupe de renormalisation. C'est pourquoi un seul chapitre sera consacré à ce sujet et qu'il sera principalement orienté vers l'étude des fonctions β .

La dernière partie de mes recherches porte encore sur un sous-domaine de l'effet Hall quantique : l'effet Hall quantique fractionnaire. Contrairement à mes travaux précédents, il ne s'agit pas d'une étude analytique mais de calculs numériques. Cette étude est menée en collaboration avec Thierry Jolicoeur. Contrairement à l'effet Hall entier, l'effet Hall fractionnaire possède encore certaines zones d'ombre dans sa compréhension. Le modèle des fermions composites explique assez bien les fractions du taux de remplissage où ont lieu les transitions dans la conductivité transverse dans le niveau de Landau le plus bas, mais devient erroné dans les autres cas.

La difficulté de l'étude numérique de ce phénomène réside dans la taille de l'espace de Hilbert à considérer. La plupart des méthodes exactes ne permettent pas d'accéder à des systèmes de taille convenable. L'idée est d'appliquer le technique du groupe de renormalisation numérique par la matrice de densité, issue de la physique des chaînes de spin. Moyennant le problème de l'expression du modèle sous une forme adéquate, l'espoir est de pouvoir considérer des dimensions d'espace plus élevées et ainsi d'étudier certains phénomènes expérimentaux encore inexpliqués.

Même si au moment de la rédaction de ce manuscrit, aucun résultat n'a encore été obtenu, il m'a semblé opportun d'inclure un chapitre sur ce sujet. Tout d'abord, le temps passé au développement des outils représente une fraction non-négligeable de ces trois ans de thèse. De plus, ce chapitre est une preuve de mon intérêt pour des domaines de la physique autres que ceux plus formels décrits auparavant.

Je conclurai sur une remarque concernant la rédaction de ce manuscrit de thèse. Suite aux discussions avec d'autres collègues (doctorants et chercheurs), j'ai pu dégager trois possibilités concernant l'intérêt d'un tel ouvrage. La première hypothèse (fort peu probable) insinue qu'il s'agirait d'un rite initiatique imposé par les anciens aux futurs docteurs. De par ma formation scientifique, j'ai tout de suite réfuté cette idée aux frontières du mysticisme. Les deux autres hypothèses semblent beaucoup raisonnables. Ainsi, ce travail aurait pour vocation d'aider le thésard à prendre du recul sur ce qu'il a produit durant sa thèse, mais aussi de servir de base solide et détaillée à toute personne qui souhaiterait continuer dans la voie ouverte par ces recherches. J'ai essayé de donner forme à cette vision de la thèse. Profitant de la place disponible dans ce type d'ouvrage, j'ai tenté de donner le maximum de détails de calculs

et d'images pour aider à la compréhension d'articles généralement trop succincts pour un débutant. Le défaut d'une telle approche est peut-être de rendre la lecture moins fluide. Je souhaite donc mettre en garde le lecteur sur le fait que le manuscrit qu'il tient entre les mains, doit être vu comme un outil, une aide et que le style employé est très loin d'être littéraire.

∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Pour faciliter la lecture de cette thèse, nous donnons ici un résumé de chaque chapitre présentant les principales idées développées ainsi que les résultats fondamentaux.

Chapitre 1 :

Ce chapitre a pour vocation de poser les bases des concepts et propriétés de la gravité réduite à deux dimensions dans le vide. Après une brève présentation des équations du système, une présentation détaillée des symétries sera faite. Nous nous intéresserons plus particulièrement au groupe de Geroch, groupe de symétrie infini à l'origine de l'intégrabilité du modèle. Nous avons aussi voulu insister sur l'aspect concret du modèle. En effet, même si une faible partie des systèmes physiques que nous pouvons imaginer entrent dans le cadre des hypothèses de la gravité réduite, un grand nombre de solutions intéressantes vérifient ces dernières, dont la plus célèbre : la solution de Schwarzschild. C'est pourquoi nous développerons quelques exemples de solutions, survolant rapidement sur les plus connues et détaillant le cas plus exotique des collisions d'ondes planes gravitationnelles, sujet généralement utilisé comme terrain d'essai pour les méthodes exactes de résolution du modèle.

Chapitre 2 :

Le second chapitre est dédié à la présentation du système en tant que modèle intégrable. Après un inévitable rappel sur les généralités des systèmes intégrables, nous consacrerons quelques temps à présenter la méthode de Belinski et Zakharov qui fut la première à mettre en évidence l'intégrabilité du modèle et à appliquer la technique de la diffusion inverse pour engendrer les solutions. Nous verrons ensuite comment la gravité réduite peut être reformulée en tant que modèle sigma.

Le reste du chapitre présente les principaux résultats de [16]. Parmi ceux-ci, nous montrerons comment les équations de la gravité réduite peuvent être reproduites à l'aide d'une paire de Lax basée sur l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$ affine déformée par un automorphisme d'ordre 2 et l'algèbre de Virasoro. Contrairement à la précédente formulation de Lax, celle-ci présente l'avantage d'inclure tous les champs et de ne pas faire apparaître de pôle mobile. Nous décrirons les transformations d'habillage qui nous permettront d'engendrer l'ensemble des solutions. Nous montrerons que l'orbite de n'importe quelle solution sous l'action de ce groupe décrit l'ensemble des métriques. Pour terminer, nous ferons le lien entre le groupe de Geroch et le groupe des transformations d'habillage.

Chapitre 3 :

Ce chapitre est le dernier consacré aux solutions exactes de la gravité réduite. Il expose en détail les résultats obtenus dans [17]. Après avoir introduit les fonctions τ et reformulé

les équations du mouvement sous forme d'équations d'Hirota, nous nous intéresserons à l'expression de la dualité dans la jauge triangulaire. Nous montrerons en particulier que les relations de dualité conduisent à un système d'équations sur les fonctions τ . Pour pouvoir évaluer ces fonctions, nous utiliserons la représentation du groupe d'habillage par les opérateurs de vertex.

Grâce à la dualité et à des identités sur les fonctions τ , nous réussirons à résoudre le problème de Riemann-Hilbert pour notre système. Ceci nous permettra d'obtenir des expressions des coefficients de la métrique et de la métrique duale comme produits de déterminant sans qu'aucune intégration ne soit nécessaire, contrairement aux précédentes méthodes.

Afin de mieux comprendre comment utiliser les précédentes formules, nous les utiliserons pour retrouver les exemples de solutions que nous avons présentés au premier chapitre. Nous conclurons en explicitant le lien entre notre méthode et celle de Belinski et Zakharov. Nous montrerons en particulier comment passer des pôles fixes aux pôles mobiles.

Chapitre 4 :

Le premier pas vers la quantification d'un système consiste à étudier la structure symplectique de la théorie classique. Dans ce chapitre basé sur [18], nous utiliserons la paire de Lax qui nous a permis d'obtenir les formules sous forme de déterminants pour les métriques, pour tenter une nouvelle approche de ce sujet. Nous commencerons par une série de rappels sur la matrice r et les systèmes non-ultralocaux. Nous exposerons ensuite la formulation hamiltonienne de la gravité réduite, en rappelant quelques notions sur les systèmes contraints.

Le cœur de ce chapitre est l'expression des crochets de Poisson pour la paire de Lax. Contre toute attente, nous aboutirons à une théorie où la dépendance des matrices r vis-à-vis des coordonnées est totalement factorisée. En particulier, nous montrerons que cela conduit à des équations de Yang-Baxter modifiées ne faisant intervenir que de purs c -nombres. Nous essaierons d'évaluer les crochets pour la matrice de monodromie et nous constaterons que cette théorie souffre a priori des mêmes problèmes que les théories non-ultralocales. En tenant compte des conditions aux limites nous verrons comment résoudre partiellement cette difficulté.

La dernière partie sera dédiée à l'étude des observables classiques. Nous construirons explicitement ces dernières en s'appuyant sur des conditions aux limites raisonnables physiquement et nous soulignerons les difficultés à calculer leur algèbres.

Chapitre 5 :

L'ensemble des recherches menées sur l'effet Hall quantique de spin est résumé dans ce chapitre. Comme il se doit, nous débuterons par une introduction sur l'effet Hall, l'exemple par excellence des problèmes de délocalisation qui nous intéressent. Le modèle d'effet Hall quantique de spin basé sur l'algèbre de $sp(2N)$ que nous étudierons, est une généralisation de la limite continue du modèle de Chalker-Coddington. C'est pourquoi nous consacrerons une partie importante à ce dernier et à ses extensions.

Nous nous concentrerons ensuite sur le système proprement dit, en appliquant en particulier la méthode supersymétrique pour en déduire l'action effective. Cette action s'exprimera comme l'action conforme supersymétrique possédant une symétrie maximale

associée à l'algèbre $osp(4N|4N)$, perturbée par quatre opérateurs marginaux. Nous verrons que la symétrie $osp(4N|4N)$ est brisée en une symétrie $osp(2|2) \otimes sp(2N)$ où $osp(2|2)$ apparaît comme une symétrie de courants chargés et $sp(2N)$ comme une symétrie de spin.

Nous étudierons la renormalisation de cette théorie. Nous observerons l'apparition d'une direction dite isotrope, qui est préservée par le flot de renormalisation, attractive dans la région des constantes de couplages positives, pour laquelle les constantes de couplage sont égales. Nous regarderons aussi la séparation spin-charge du modèle. Nous terminerons par quelques remarques à propos des modèles sigma dans la limite de N grand, qui suggèrent que la théorie devient massive à grande distance.

Chapitre 6 :

Ce chapitre a pour but de présenter les bases de l'application de l'algorithme de renormalisation numérique par la matrice de densité (DMRG) aux problèmes liés à l'effet Hall quantique fractionnaire. Une grande partie sera consacrée à l'algorithme proprement dit. Nous étudierons son utilité et son fonctionnement. Nous ferons ensuite un bref rappel sur l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous montrerons en particulier comment un système a priori bidimensionnel peut arriver à entrer dans le cadre des hypothèses du DMRG : un système unidimensionnel de blocs interagissant uniquement entre plus proche voisins.

En annexe, nous présenterons l'étude de la molécule magnétique $Mn_{12}Ac$ qui a nécessité l'utilisation d'une partie de programme développée pour le DMRG. Nous déduirons les constantes de couplage de l'hamiltonien de Heisenberg servant à modéliser les interactions entre les différents spins de $Mn_{12}Ac$.

Table des matières

Remerciements	i
Préambule	iii
I Gravité réduite à deux dimensions	5
	7
1 La physique de la gravité réduite à deux dimensions	7
1.1 Introduction	7
1.2 Les équations	8
1.3 Les symétries du système	9
1.4 La dualité de Kramer-Neugebauer	10
1.5 Le groupe de Geroch	11
1.6 Exemples de solutions physiques	12
1.6.1 Prolongement analytique	13
1.6.2 Solutions de Schwarzschild et Kerr	13
1.6.3 Collisions d'ondes planes gravitationnelles	14
1.7 Conclusion	18
2 Intégrabilité du modèle	19
2.1 (Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (1/2)	19
2.2 La méthode de Belinski et Zakharov	22
2.2.1 Principe de la méthode	22
2.2.2 Les solutions à un soliton	24
2.2.2.1 Cas générique	24
2.2.2.2 Application	25
2.2.3 Généralisation et conclusions	26
2.3 Le modèle sigma	27
2.3.1 Généralités sur le modèle sigma bosonique	27
2.3.2 Modèle sigma pour la gravité réduite	28
2.4 Connexion de Lax	29
2.4.1 Résultat fondamental	29
2.4.2 Solution du vide	30
2.5 Transformations d'habillage appliquées à la gravité	31
2.5.1 Formules générales	32

2.5.2	Engendrer l'ensemble des solutions	33
2.5.3	Groupe de Geroch et transformations d'habillage	35
3	Méthode algébrique de résolution	39
3.1	Fonctions τ	39
3.1.1	Fonctions τ et connexion	39
3.1.2	Fonctions τ et variables duales	41
3.2	Dualité et jauge triangulaire	42
3.2.1	Nouvelle paramétrisation des équations de Ernst	42
3.2.2	Solutions duales dans la jauge triangulaire	43
3.3	Opérateurs de vertex et représentations	45
3.3.1	généralités et représentations du groupe d'habillage	45
3.3.2	Evaluation des fonctions τ	47
3.4	Formulation algébrique des éléments de la métrique	48
3.4.1	Opérateurs de vertex et dualité	48
3.4.2	Opérateurs de vertex et jauge triangulaire	49
3.4.3	Formule des déterminants	50
3.5	Application à quelques exemples	51
3.5.1	Solutions diagonales	51
3.5.2	Solutions non-diagonales	53
3.6	Lien avec la méthode de Belinski et Zakharov	54
3.7	Conclusions	55
4	Structure symplectique de la gravité réduite	57
4.1	(Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (2/2)	57
4.1.1	Engendrer les quantités conservées	57
4.1.2	Exemple de matrice r	61
4.1.3	Systèmes non-ultralocaux	63
4.2	Formulation Hamiltonienne de la gravité	64
4.2.1	Systèmes contraints	64
4.2.2	Structure symplectique de la gravité réduite	66
4.3	Formalisme de la matrice r pour la gravité réduite	69
4.3.1	Crochets pour la paire de Lax	69
4.3.2	Equations de Yang-Baxter modifiées	71
4.3.3	Comparaison avec les précédentes formulations et généralisation . . .	73
4.4	Matrice de monodromie	75
4.5	Observables classiques	76
4.6	Conclusions et perspectives	80
A	Les équations du mouvement	81
B	Résoudre une équation sur \mathcal{VG}	83
C	Quelques calculs avec les opérateurs de vertex	89
D	Petit guide pour construire sa métrique	95
E	Vérification de l'identité de Jacobi	99

F	Liste des publications	103
II	Effet Hall quantique de spin à grand N	107
5	Effet Hall quantique de spin à grand N	109
5.1	Introduction	109
5.2	Description du modèle	112
5.2.1	Le modèle de Chalker-Coddington	112
5.2.2	Limite continue	115
5.2.3	Généralisation	117
5.3	Action effective	120
5.3.1	Moyenner sur le désordre	120
5.3.2	Supermultiplets	121
5.3.3	Symétrie du système	123
5.4	Renormalisation	124
5.4.1	Calcul des fonctions β	124
5.4.2	Diagramme de phases	127
5.5	Séparation spin-charge	128
5.6	Approche par le modèle sigma et conclusions	129
A	Calcul des coefficients algébriques	131
B	Programme pour les OPE	135
C	Liste des publications	139
III	Groupe de renormalisation par la matrice de densité	143
6	Application du DMRG à l'effet Hall quantique fractionnaire	145
6.1	Introduction	145
6.2	L'algorithme du groupe de renormalisation par la matrice de densité	146
6.2.1	Algorithme de Lánczos, limitations informatiques	146
6.2.2	Principe du DMRG	147
6.2.3	Succès et limites du DMRG	151
6.3	Effet Hall quantique fractionnaire	151
6.3.1	Description du phénomène	151
6.3.2	Modélisation	152
6.4	Conclusions	155
A	Architecture du programme	157
B	Constantes de couplage de $Mn_{12}Ac$	159

Première partie

Gravité réduite à deux dimensions

Chapitre 1

La physique de la gravité réduite à deux dimensions

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Les équations	8
1.3	Les symétries du système	9
1.4	La dualité de Kramer-Neugebauer	10
1.5	Le groupe de Geroch	11
1.6	Exemples de solutions physiques	12
1.6.1	Prolongement analytique	13
1.6.2	Solutions de Schwarzschild et Kerr	13
1.6.3	Collisions d'ondes planes gravitationnelles	14
1.7	Conclusion	18

1.1 Introduction

Bien que découverte depuis près de quatre-vingt dix ans, la relativité générale est encore un domaine où le nombre de familles de solutions analytiques exactes reste restreint. L'existence d'un domaine où les équations d'Einstein sont intégrables constitue en ce sens, une exception. En 1978 Belinskii et Zakharov[1] ont pu démontrer qu'en présence de deux vecteurs de Killing surface-commutants et dans le vide, le système était intégrable. Ces hypothèses, la métrique ne dépendant que de deux variables et l'absence de matière, peuvent sembler trop restrictives pour engendrer des solutions intéressantes physiquement. En fait, il n'en est rien. Le nombre d'applications physiques possibles est élevé, allant des solutions les plus connues comme celle de Schwarzschild, à des solutions plus exotiques décrivant des collisions d'ondes gravitationnelles. Ce chapitre a pour but de rappeler les propriétés de ce secteur des solutions d'Einstein ainsi que d'explicitier les conventions et notations que nous emploierons au cours des autres chapitres. Une large section sera consacrée à présenter des exemples concrets de solutions.

1.2 Les équations

Comme toute thèse se rapportant à la gravité, nous allons écrire au moins une fois les équations d'Einstein de la relativité générale sous leur forme compacte

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Malgré la beauté de cette formule, reliant la géométrie de l'espace-temps à l'énergie et à la matière présente, elle ne permet pas une étude aisée de notre problème sous cette apparence. Nous allons nous attacher dans ce paragraphe à établir les équations du modèle sous une forme pratique.

Notre première hypothèse concerne l'absence de matière et d'énergie. Ainsi le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ est nul. La géométrie de l'espace-temps est donc telle que le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ est nul. La seconde hypothèse suppose l'existence de deux vecteurs de Killing surface-commutants. Deux choix sont alors possibles : soit les deux vecteurs sont du genre espace (solutions avec symétrie radiale), soit l'un des vecteurs est du genre espace et l'autre de genre temps (solutions stationnaires avec symétrie axiale). Dans la suite de cet exposé, nous supposons que nous sommes dans le premier cas. Nous verrons par la suite qu'il est possible de passer d'un cas à l'autre par simple prolongement analytique.

Considérons un repère défini par un système de coordonnées (t, x_1, x_2, z) tel que les vecteurs de Killing puissent être écrits ∂_{x_1} et ∂_{x_2} . Par réduction dimensionnelle, il est alors possible de mettre la métrique sous la forme [2]

$$ds^2 = \rho^{-\frac{1}{2}}(z, t) e^{2\hat{\sigma}(z, t)} (-dt^2 + dz^2) + \rho(z, t) S_{ij}(z, t) dx^i dx^j \quad (1.2)$$

Notons que nous avons choisi la convention $(-, +, +, +)$ pour la signature de métrique. La réduction dimensionnelle est une méthode usuelle et un certain nombre de quantités portent des noms standards. Ainsi appelle-t-on $\rho(z, t)$ le dilaton et $\hat{\sigma}(z, t)$ le facteur conforme. La matrice 2×2 symétrique S est normalisée ($\det(S) = 1$) et est, par conséquent, un élément du groupe $SL(2, \mathbb{R})$.

Le calcul du tenseur de Ricci associé à cette métrique étant relativement lourd, nous en donnerons les principales étapes dans l'appendice A. Après quelques manipulations, il est possible d'écrire les équations d'Einstein de la manière suivante

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2) \rho = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial_t (\rho (\partial_t S) S^{-1}) - \partial_z (\rho (\partial_z S) S^{-1}) = 0 \quad (1.4)$$

$$((\partial_t \pm \partial_z) \rho) (\partial_t \pm \partial_z) \hat{\sigma} = -\frac{1}{8} \rho \text{tr} ((\partial_t \pm \partial_z) S. (\partial_t \pm \partial_z) S^{-1}) \quad (1.5)$$

Comme nous pouvons le constater, il sera agréable d'utiliser les coordonnées du cône de lumière.

$$z_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (z \pm t) \quad (1.6)$$

La métrique peut alors s'écrire sous la forme

$$ds^2 = 2\rho^{-\frac{1}{2}}(z_+, z_-) e^{2\hat{\sigma}(z_+, z_-)} dz_+ dz_- + \rho(z_+, z_-) S_{ij}(z_+, z_-) dx^i dx^j \quad (1.7)$$

et les équations du mouvement (1.3-1.5) deviennent

$$\partial_+ \partial_- \rho = 0 \quad (1.8)$$

$$\partial_+ (\rho (\partial_- S) S^{-1}) + \partial_- (\rho (\partial_+ S) S^{-1}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \hat{\sigma} + \rho \frac{1}{8} \text{tr} (\partial_{\pm} S. \partial_{\pm} S^{-1}) = 0 \quad (1.10)$$

où ∂_+ (respectivement ∂_-) désigne la dérivée partielle ∂_{z_+} (respectivement ∂_{z_-}). C'est à partir de cette dernière formulation que nous allons commencer à étudier les symétries du système.

1.3 Les symétries du système

Après avoir effectué la réduction dimensionnelle, nous pouvons nous interroger sur les symétries résiduelles de la métrique. Sous sa forme (1.7), il est évident de voir qu'elle est invariante sous les transformations conformes

$$z_+ \longrightarrow f_+(z_+) \quad z_- \longrightarrow f_-(z_-)$$

De même, on remarque aisément qu'une transformation globale des coordonnées

$$x^i \longrightarrow M^i_j x^j$$

peut être réabsorbée dans la définition de la matrice S ($S \longrightarrow M^t S M$).

En vue de l'étude de l'intégrabilité du système, nous allons introduire le zweibein associé aux coordonnées (x^1, x^2) . Nous l'écrirons sous la forme $\sqrt{\rho}\mathcal{V}$. La matrice \mathcal{V} est un élément de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que la matrice S puisse s'écrire

$$S = \mathcal{V}^t \mathcal{V} \tag{1.11}$$

où \mathcal{V}^t est la transposée de \mathcal{V} . Quelles sont les transformations du zweibein qui laissent la métrique invariante ? Nous retrouvons tout d'abord les transformations globales citées auparavant, qui se traduisent ici en une invariance par action à droite avec toute matrice de $SL(2, \mathbb{R})$. Ces transformations forment le groupe de Matzner-Misner. Nous pouvons ensuite regarder s'il n'existerait pas aussi une invariance par action à gauche sur \mathcal{V} . Ceci est possible si la matrice par laquelle nous agissons est un élément \mathcal{O} de $SO(2)$. En effet, nous vérifions l'identité

$$\mathcal{V}^t \mathcal{O}^t \mathcal{O} \mathcal{V} = \mathcal{V}^t \mathcal{V}$$

Mais à la différence de l'action à droite, cette transformation peut être locale, impliquant ainsi une invariance de jauge $SO(2)$ du modèle. La raison physique de cette covariance est assez simple à comprendre. En chaque point de l'espace-temps, il est possible de définir un repère au repos tangent au repère défini par notre métrique. De par nos hypothèses, seules sont fixées les directions parallèles aux axes z et t ainsi que le plan où se situent les axes parallèles à ceux de x^1 et x^2 . Seul le plan étant défini, nous avons la possibilité d'effectuer une rotation de ce plan tout en gardant les propriétés du repère tangent. Cette liberté se traduit par l'invariance de jauge $SO(2)$ à gauche sur \mathcal{V} .

Au final, nous pouvons résumer l'ensemble des invariances de \mathcal{V} par le diagramme suivant

$$SO(2)_{\text{local}} \longrightarrow \mathcal{V} \longleftarrow SL(2, \mathbb{R})_{\text{global}}$$

Nous reviendrons plus longuement sur l'invariance de jauge $SO(2)$ dans le chapitre suivant et en particulier lors de la présentation du système comme un modèle sigma non-linéaire.

1.4 La dualité de Kramer-Neugebauer

Une forme de métrique particulièrement intéressante pour la gravité réduite à deux dimensions fut introduite par Papetrou [19]. Elle conduit aux équations de Ernst [3] qui possèdent comme nous le verrons une propriété de dualité. Pour déduire cette métrique, nous allons fixer le choix de jauge précédent tel que la matrice \mathcal{V} soit paramétrisée de la façon suivante

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1/2} & 0 \\ -N\Delta^{1/2} & \Delta^{1/2} \end{pmatrix}$$

Cette jauge est appelée jauge triangulaire. Grâce à cette paramétrisation, la métrique peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{2\hat{\sigma}} (dz^2 - dt^2) + \rho \Delta^{-1} dx^{12} + \rho \Delta (dx^2 - N dx^1)^2 \quad (1.12)$$

et les équations du mouvement (équations de Ernst) associées s'écrivent

$$\partial_+ \partial_- \rho = 0 \quad (1.13)$$

$$\partial_- (\rho \Delta^2 \partial_+ N) + \partial_+ (\rho \Delta^2 \partial_- N) = 0 \quad (1.14)$$

$$\partial_- (\rho \Delta^{-1} \partial_+ \Delta) + \partial_+ (\rho \Delta^{-1} \partial_- \Delta) = 2\rho \Delta^2 (\partial_+ N) (\partial_- N) \quad (1.15)$$

$$(\partial_{\pm} \hat{\sigma}) (\rho^{-1} \partial_{\pm} \rho) = \frac{1}{4} (\Delta^{-1} \partial_{\pm} \Delta)^2 + \frac{1}{4} (\Delta \partial_{\pm} N)^2 \quad (1.16)$$

La métrique est ainsi définie par quatres champs $(\rho, \hat{\sigma}, \Delta, N)$ à un certain nombre de transformations près. Elle est invariante par les translations $N \rightarrow N + \delta$ et $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{\sigma} + \delta'$ et par dilatation $\Delta \rightarrow \lambda \Delta$ et $N \rightarrow \lambda^{-1} N$. Ces propriétés seront utilisées en particulier lors de la détermination de solutions à l'aide de la méthode algébrique que nous avons développée.

Nous utiliserons souvent une grandeur complexe décrivant Δ et N appelée potentiel de Ernst et définie par

$$\Delta^{-1} + iN \quad (1.17)$$

En particulier, cette quantité se déduira naturellement de la méthode algébrique que nous décrirons par la suite.

L'importance de cette paramétrisation tient en l'existence de champs duaux $(\rho^*, \hat{\sigma}^*, \Delta^*, N^*)$ définis par

$$\begin{aligned} \rho^* &= \rho \\ \Delta^* &= 1/(\rho \Delta) \\ \Delta^* \partial_{\pm} N^* &= \pm \Delta \partial_{\pm} N \\ \Delta^* e^{4\hat{\sigma}^*} &= \Delta e^{4\hat{\sigma}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

On notera que N^* est défini à une translation près. Ces champs vérifient à leur tour les équations de Ernst (1.13-1.16), prouvant ainsi que la théorie est self-duale. Cette dualité est appelée dualité de Kramer-Neugebauer [9]. La métrique duale associée peut s'écrire

$$ds^{*2} = \Delta e^{2\hat{\sigma}} (dz^2 - dt^2) + \rho^2 \Delta dx^{12} + \Delta^{-1} (dx^2 - N^* dx^1)^2 \quad (1.19)$$

Comme nous le verrons lors de la présentation des exemples physiques, cette propriété peut être observée sur des cas concrets. Nous montrons en particulier comment elle relie la solution de Schwarzschild à la plus simple des solutions décrivant la collision d'ondes planes gravitationnelles. Mais l'importance de cette dualité réside dans son rôle à l'origine de l'existence d'un groupe de symétrie à l'origine de l'intégrabilité du système.

1.5 Le groupe de Geroch

Nous avons vu au paragraphe 1.3, que les équations du mouvement étaient invariantes sous les transformations du groupe de Matzner-Misner. Dans la suite, nous noterons J_+ , J_- et J_z les générateurs de ce groupe. Regardons l'action de ces derniers sur les composantes de la paramétrisation de Papetrou.

$$(J_z(\Delta), J_z(N), J_z(\hat{\sigma})) = (\Delta, -N, 0) \quad (1.20)$$

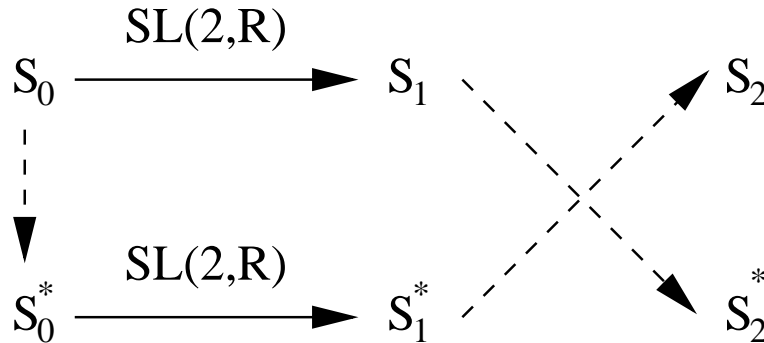
$$(J_-(\Delta), J_-(N), J_-(\hat{\sigma})) = (0, 1, 0) \quad (1.21)$$

$$(J_+(\Delta), J_+(N), J_+(\hat{\sigma})) = (2\Delta N, -N^2 + \Delta^{-2}, 0) \quad (1.22)$$

A priori, nous pouvons aussi appliquer les transformations de $SL(2, \mathbb{R})$ dans l'espace des variables duales que nous avons définies dans la section précédente. Le groupe associé porte le nom de groupe de Ehlers. Nous noterons les générateurs associés J_+^* , J_-^* et J_z^* . En fixant la constante d'intégration dans la relation de dualité (1.18), il est alors possible de définir la transformation de dualité α permettant de passer des variables $(\rho, \hat{\sigma}, \Delta, N)$ aux variables $(\rho, \hat{\sigma}^*, \Delta^*, N^*)$. Ainsi, les générateurs du groupe de Ehlers s'exprimeraient en fonction de ceux du groupe de Matzner-Misner

$$J_z^* = \alpha^{-1} J_z \alpha \quad \text{et} \quad J_{\pm}^* = \alpha^{-1} J_{\pm} \alpha \quad (1.23)$$

Il est naturel de se poser la question si les transformations de Ehler et de Matzner-Misner commutent. La réponse est résumée par le schéma suivant



En pointillé, nous avons les transformations de dualité et en traits pleins, les transformations de $SL(2, \mathbb{R})$. Comme nous pouvons le constater, la principale caractéristique de ces transformations est de ne pas commuter, c'est-à-dire qu'en partant d'une même solution et en appliquant successivement la transformation de dualité puis une transformation de $SL(2, \mathbb{R})$ ou si nous effectuons d'abord la transformation de $SL(2, \mathbb{R})$ puis l'opération de dualité, nous trouvons deux métriques distinctes.

L'ensemble des transformations engendrées par celles du groupe de Matzner-Misner et celles du groupe de Ehlers forme le groupe de Geroch [10]. Comme nous le verrons par la suite, ce groupe joue un rôle clé dans l'intégrabilité de ce système. Nous pouvons d'ores et déjà donner une raison intuitive de son importance. Il nous suffit en effet, si nous raisonnons sur le graphique, de continuer l'opération sur les deux solutions produites. Par application successive des transformations du groupe de Geroch, nous pouvons ainsi engendrer une infinité de solutions non-équivalentes.

L'algèbre engendrée par l'ensemble des générateurs du groupe de Geroch fut identifiée par Julia [27] comme étant l'algèbre de Kac-Moody $sl(2, \mathbb{R})$ affine. Comme nous ne présupposons

pas que le lecteur soit familier avec les algèbres de Lie affine, nous présenterons cette algèbre sous un angle concret. Les éléments de l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$ affine peuvent s'écrire sous la forme

$$X\lambda^n \quad \text{avec} \quad X \in sl(2, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Une façon de voir cette algèbre est de considérer ces éléments comme le produit tensoriel de $sl(2, \mathbb{R})$ par l'ensemble des polynômes de Laurent. La relation de commutation qui se déduit naturellement de cette image est

$$[X\lambda^n, Y\lambda^m] = [X, Y]\lambda^{n+m} \quad (1.24)$$

Ce que nous avons construit dans ce cas est l'algèbre de boucle. Pour arriver à l'algèbre affine, nous allons ajouter un élément k appelé extension centrale commutant avec tous les éléments de l'algèbre de boucle et tel que la relation de commutation (1.24) soit modifiée en

$$[X\lambda^n, Y\lambda^m] = [X, Y]\lambda^{n+m} + \frac{n}{2}k \operatorname{tr}(XY) \delta_{n+m,0} \quad (1.25)$$

On peut montrer que cette extension est unique et non triviale (contrairement au cas des algèbres de Lie simple).

Nous profitons de cette présentation de l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$ affine pour introduire quelques notations que nous utiliserons par la suite. Nous aurons à utiliser \mathcal{H}_{aft} , l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$ affine déformée par un automorphisme d'ordre 2 laissant invariant la sous algèbre $so(2)$. Nous nous permettrons d'utiliser l'anglicisme "twisté" à la place du qualificatif déformé généralement peu usité. Cet automorphisme η est défini par $\eta(X) = -X^t$ où t désigne l'opération de transposition. Son extension à l'algèbre affine est définie par

$$\eta(X\lambda^n) = (-1)^{n+1} X^t \lambda^n \quad \text{et} \quad \eta(k) = k \quad (1.26)$$

Il est aisé de vérifier qu'avec cette définition, η préserve bien la relation de commutation (1.25). Cette automorphisme impose donc aux éléments de l'algèbre \mathcal{H}_{aft} d'être de la forme $X\lambda^{2n}$ avec $X \in so(2)$ et $Y\lambda^{2n+1}$ où Y s'écrit comme une combinaison des générateurs de $sl(2, \mathbb{R})$ n'appartenant pas à $so(2)$.

Pour terminer, nous introduisons les deux sous-algèbres de Borel \mathcal{B}_{\pm} . Rappelons qu'une sous-algèbre de Borel \mathcal{B} d'une algèbre \mathcal{G} est une sous-algèbre vérifiant

$$[\mathcal{B}, \mathcal{B}] \subset \mathcal{B} \quad (1.27)$$

\mathcal{B}_{\pm} sont définies par

$$\mathcal{B}_+ = \{X\lambda^n | n \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_- = \{X\lambda^n | n \leq 0\} \quad (1.28)$$

On vérifiera aisément que ces définitions sont compatibles avec (1.27).

1.6 Exemples de solutions physiques

Nous allons nous attacher à présenter dans cette section quelques exemples concrets de solutions de la gravité réduite à deux dimensions dans le vide. Le thème des travaux présentés dans cette thèse ayant une orientation technique très marquée, nous nous limiterons à une présentation succincte de la physique associée à ces solutions.

1.6.1 Prolongement analytique

Avant de s'intéresser aux exemples, nous allons faire le lien entre les deux classes de solutions que nous présenterons : les solutions stationnaires axi-symétriques et les solutions à symétrie radiale. Pour passer d'une classe à l'autre, il suffit d'utiliser le prolongement analytique suivant

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow ir & x^1 &\longrightarrow i\varphi \\ z &\longrightarrow \theta & x^2 &\longrightarrow i\tau \\ \rho &\longrightarrow i\rho \end{aligned} \quad (1.29)$$

Appliqué à la métrique duale (1.19), il nous permet d'obtenir la métrique stationnaire axi-symétrique associée

$$ds_*^2 = -\Delta^{-1}(d\tau + \omega d\varphi)^2 + \Delta e^{2\hat{\sigma}}(d\theta^2 + d\rho^2) + \rho^2 \Delta d\varphi^2 \quad (1.30)$$

en ayant posé $\omega = -N^*$.

La seule difficulté de cette technique réside dans l'étude du domaine de validité de la solution qui est en général plus compliquée dans ce secteur.

1.6.2 Solutions de Schwarzschild et Kerr

La solution des équations d'Einstein de la gravité la plus connue est sans nul doute celle de Schwarzschild [14]. Historiquement première solution analytique à avoir été découverte, elle est d'une importance physique cruciale. Elle décrit la métrique créée par un objet céleste sphérique de masse M . Pour le champ de gravité en dehors de l'objet, elle prend la forme

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.31)$$

Comme nous pouvons le constater, elle vérifie les hypothèses de gravité réduite à deux dimensions. La célébrité de cette solution est telle qu'une très grande littérature sur la physique associée à cette solution existe. Pour cette raison, nous laissons le lecteur intéressé consulter un des nombreux ouvrages traitant ce sujet comme par exemple [12]

L'extension naturelle de la solution de Schwarzschild consiste à regarder le cas où l'objet produisant le champ de gravitation possède un moment cinétique, tel qu'un trou noir en rotation. La solution de ce problème nous est donnée par la métrique

$$\begin{aligned} 2M^2 ds^2 = & -\left(1 - \frac{2Mr}{R^2}\right) dt^2 + \frac{4aMr}{R^2} \sin^2 \theta d\tau d\phi \\ & + \left(r^2 + a^2 - \frac{2a^2 Mr}{R^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + R^2 \left(\frac{1}{D} dr^2 + d\theta^2\right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

où a est le moment angulaire par unité de masse et avec

$$R^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad D = r^2 - 2Mr + a^2$$

Remarquons que dans le cas limite où le moment cinétique est nul, nous retrouvons bien la métrique de Schwarzschild. Notons aussi qu'il s'agit d'une métrique non-diagonale.

Ces deux exemples célèbres prouvent bien l'intérêt de regarder ce secteur de la gravité que constitue la gravité réduite à deux dimensions. Même si les hypothèses peuvent paraître au départ draconiennes, nous avons déjà montré qu'elles suffisent à décrire une physique riche.

1.6.3 Collisions d'ondes planes gravitationnelles

Alors qu'à l'heure actuelle aucune expérience n'a mis en évidence l'existence d'ondes gravitationnelles, l'engouement suscité par les collisions d'ondes gravitationnelles peut paraître exagéré. Une explication de l'intérêt théorique est présentée par Griffiths [11]. Dans le cas de l'électromagnétisme, la linéarité des équations de Maxwell exclut l'interaction entre ondes dans le vide. Mais un tel phénomène peut arriver pour les ondes gravitationnelles de par le caractère non-linéaire des équations d'Einstein de la relativité générale. L'idée est donc d'étudier le cas le plus simple, la collisions d'ondes planes gravitationnelles, pour essayer de mieux comprendre le rôle et les conséquences de la non-linéarité.

Le type d'onde que nous allons considérer est celui des ondes planes gravitationnelles impulsives. Nous commencerons par expliciter chacun des termes de cette expression. En gravitation, une onde plane est une solution telle qu'il existe un champ de vecteurs du genre lumière dont les dérivées covariantes sont nulles. Ceci permet de définir la notion de rayons parallèles à l'image du vecteur d'onde pour les ondes électromagnétiques. Dans ce cas, on peut démontrer l'existence de 2-surfaces où ce champ est en chaque point orthogonal à cette dernière. Ces 2-surfaces sont l'analogue des surfaces d'onde. Si nous supposons de plus que les composantes de ce champ sont constantes (en ayant convenablement choisi le système de coordonnées), alors les 2-surfaces sont planes. Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, la métrique après le passage de l'onde peut alors se mettre sous la forme

$$ds^2 = -2dudv - h(u) \left((X^2 - Y^2) \cos \alpha + 2XY \sin \alpha \right) du^2 + dX^2 + dY^2$$

Ici u et v jouent le rôle des coordonnées du cône de lumière et les variables X et Y sont les coordonnées sur les 2-surfaces. Nous avons encore la possibilité de choisir h la fonction d'une des coordonnées du cône de lumière et l'angle α . Ce dernier peut être interprété comme l'angle entre un vecteur du genre espace appartenant au front d'onde que nous définirons comme vecteur de polarisation et un des axes de la 2-surface (ici l'axe (Ox)). Dans le cas d'une seule onde, il est toujours possible de prendre cet angle égal à zéro.

On parle d'onde plane impulsive si on choisit $h(u) = \delta(u)$. Physiquement, cela signifie qu'avant et après le passage de l'onde, l'espace est équivalent à l'espace plat Minkowskien. Moyennant un choix de repère adéquat, la métrique après le passage de l'onde s'écrit

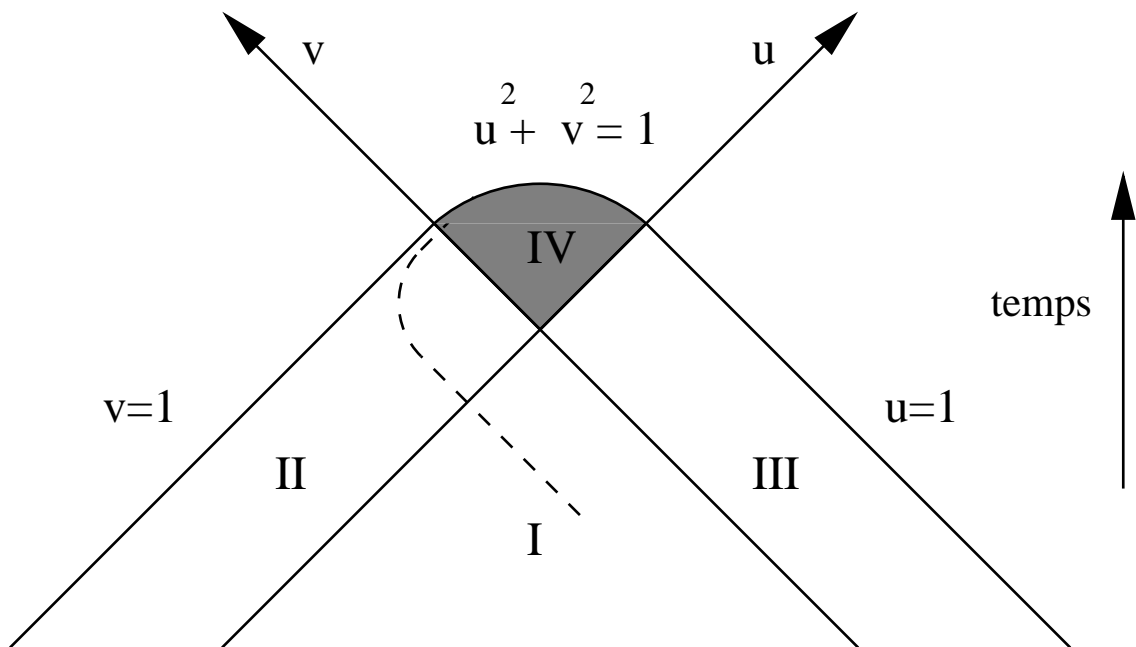
$$ds^2 = -2dudv + (1-u)^2 dx^2 + (1+u)^2 dy^2$$

A l'aide de cette définition, nous pouvons commencer à étudier les collisions d'ondes planes gravitationnelles impulsives. Deux cas se présentent à nous : soit les polarisations sont colinéaires et on aboutit alors à une métrique diagonale, soit il existe un angle non-nul entre les polarisations (solution non-diagonale).

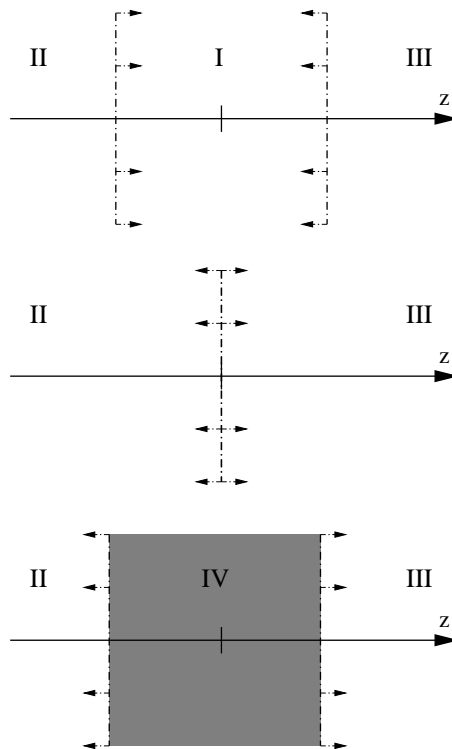
La solution la plus simple associée au premier cas est celle de Khan-Penrose [13]. Historiquement, elle fut la première solution analytique à décrire ce type de collision. Dans la zone d'interaction, elle s'exprime de la manière suivante

$$ds^2 = -2 \frac{(1-u^2-v^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2})^2} dudv + (1-u^2-v^2) \left(\frac{1+u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}}{1-u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}} dx^2 + \frac{1-u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}}{1+u\sqrt{1-v^2}+v\sqrt{1-u^2}} dy^2 \right) \quad (1.33)$$

Le diagramme suivant représente la projection dans le plan (u, v) .



La région *I* correspond à l'espace avant le passage des ondes, la région *II* (respectivement *III*) à l'espace après le passage de la première (respectivement deuxième) onde. Finalement la région *IV* correspond au domaine où la collision se produit. Une façon moins rigoureuse mais un peu plus simple de voir ce qui se passe consiste à regarder ce qui se passe dans la direction $z = u - v$ à différents instants.



Les fronts d'onde en $u = 0$ et $v = 0$ sont représentés en pointillé avec des flèches indiquant le sens de propagation. Sur le premier dessin se situant à un temps $t < 0$, nous retrouvons

les deux régions *II* et *III* après le passage des ondes ainsi que la zone *I*. Les lignes $u = 1$ et $v = 1$ correspondent comme nous le verrons dans le paragraphe suivant aux extrémités $z \rightarrow \pm\infty$. Au temps $t = 0$, les deux ondes entrent en collision. Pour $t > 0$, tout l'espace a été visité par au moins une onde et la zone de collision *IV* commence à croître.

L'importance de cette solution est de mettre en évidence l'existence d'une singularité de la courbure en $u^2 + v^2 = 1$ dans la zone d'interaction. Cette singularité de courbure semble se prolonger dans les régions *II* et *III*, ce qui constituerait une violation de la causalité. En fait, les lignes de singularités apparentes $u = 1$ et $v = 1$ résultent de la projection dans le plan (u, v) . Pour s'en convaincre, il suffit de regarder une géodésique nulle partant de la région *I* (ligne en pointillé) pour s'apercevoir qu'elle n'atteint jamais la ligne de singularité $v = 1$ et atteint la région d'interaction (ce type de singularité est appelée singularité de repli).

Profitons de cet exemple relativement simple pour donner un exemple de métrique duale. L'identification des champs intervenant dans la paramétrisation de Papetrou est immédiate dans l'expression (1.33). En appliquant les formules (1.18), nous déduisons l'expression

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -2 \frac{(1 - u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}} \left(1 + u\sqrt{1 - v^2} + v\sqrt{1 - u^2}\right) dudv}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}(uv + \sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2})^2 \left(1 - u\sqrt{1 - v^2} - v\sqrt{1 - u^2}\right)} \\
 & + (1 - u^2 - v^2)^2 \frac{1 + u\sqrt{1 - v^2} + v\sqrt{1 - u^2}}{1 - u\sqrt{1 - v^2} - v\sqrt{1 - u^2}} dx^2 \\
 & + \frac{1 - u\sqrt{1 - v^2} - v\sqrt{1 - u^2}}{1 + u\sqrt{1 - v^2} + v\sqrt{1 - u^2}} dy^2
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

En introduisant la paramétrisation

$$\xi = v\sqrt{1 - u^2} + u\sqrt{1 - v^2} \tag{1.35}$$

$$w = v\sqrt{1 - u^2} - u\sqrt{1 - v^2} \tag{1.36}$$

la métrique (1.34) devient

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{(1 - \xi)^2}{2} \left(\frac{d\xi^2}{1 - \xi^2} - \frac{dw^2}{1 - w^2} \right) \\
 & + \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) dx^2 + (1 - w^2) (1 - \xi)^2 dy^2
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Regardons ce que donne le prolongement analytique de cette métrique. Posons pour cela

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{r}{M} - 1 & ; & & w &= \cos \theta \\
 \tau &= -\sqrt{2}Mx & ; & & \phi &= \sqrt{2}y
 \end{aligned}$$

En substituant ces variables dans (1.37), nous retrouvons la métrique de Schwarzschild (1.31).

Dans le cas de collisions d'ondes planes impulsives avec des polarisations non colinéaires, il existe tout une famille de solutions. Les métriques associées sont non-diagonales. La plus simple est celle de Chandrasekhar et Xanthopoulos[5]. Moyennant l'introduction de nouvelles coordonnées, elle s'écrit

$$ds^2 = -\frac{X}{2} \left(\frac{d\xi^2}{1 - \xi^2} - \frac{dw^2}{1 - w^2} \right) + \frac{Y}{X} \left(dx - \frac{2q}{p(p+1)} dy \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4q(1-w^2)(1-p\xi)}{pX} \left(dx - \frac{2q}{p(p+1)} dy \right) dy \\
& + \frac{(1-w^2)}{p^2 X} \left((1-p\xi)^2 + q^2 \right)^2 + p^2 q^2 (1-\xi^2)(1-w^2) dy^2
\end{aligned} \tag{1.38}$$

avec $X = (1-p\xi)^2 + q^2 w^2$, $Y = 1 - p^2 \xi^2 - q^2 w^2$ et $p^2 + q^2 = 1$. Les variables p et q s'interprètent en terme de cosinus et sinus de l'angle entre les polarisations des ondes.

Comme dans le cas de la solution de Khan-Penrose, il est possible d'effectuer un prolongement analytique pour obtenir la solution stationnaire axi-symétrique associée. Posons

$$p = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M} \quad ; \quad q = \frac{a}{M}$$

et exprimons les coordonnées sous la forme

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{r - M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \quad ; \quad w = \cos \theta \\
\tau &= -\sqrt{2}M \left(x - \frac{2q}{p(1+p)} y \right) \quad ; \quad \phi = \frac{\sqrt{2}M}{\sqrt{M^2 - a^2}} y
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
X &= \frac{R^2}{M^2}, \quad Y = -\frac{1}{M^2} (R^2 - 2Mr) \\
\frac{d\xi^2}{1-\xi^2} &= -\frac{dr^2}{D}, \quad \frac{dw^2}{1-w^2} = d\theta^2
\end{aligned}$$

Nous vérifions alors aisément que nous obtenons la solution de Kerr (1.32). Remarquons que pour $p = 1$, nous retrouvons les résultats associés à la métrique duale de Khan-Penrose.

Il est possible d'évaluer la solution duale de celle de Chandrasekhar et Xanthopoulos. Nous obtenons alors une autre solution associée à une collision de même type, la solution de Nuktu-Halil[15]. Nous nous contenterons de donner ici son potentiel de Ernst

$$\frac{\rho}{G_{22}^*} + i \frac{G_{12}^*}{G_{22}^*} = \frac{1 + p\xi + iqw}{1 - p\xi - iqw} \tag{1.39}$$

La généralisation de ces solutions est donnée par la famille de solutions de Ernst [4]. Cette famille est paramétrisée par les variables p, p', q, q' et n vérifiant $p^2 + q^2 = 1$ et $p'^2 + q'^2 = 1$. La métrique ayant une expression relativement compliquée, nous nous contenterons de donner le facteur conforme et le potentiel de Ernst en vue de l'utilisation que nous en aurons par la suite. Le facteur conforme nous est donné par

$$\begin{aligned}
e^{2\hat{\sigma}} (d\rho^2 - dz^2) &= \frac{1}{4} \rho^{\frac{n^2}{2}} \left(\frac{d\xi^2}{1-\xi^2} - \frac{dw^2}{1-w^2} \right) \left[(1-\xi^2) \left((p+p')^2 \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \right)^n + (p'-p)^2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^n \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-w)^2 \left((q+q')^2 \left(\frac{1-w}{1+w} \right)^n + (q'-q)^2 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^n \right) + 2(q^2 - q'^2)(\xi^2 - w^2) \right]
\end{aligned}$$

Le potentiel de Ernst est quant à lui défini par

$$\rho^n \frac{A}{B} \tag{1.40}$$

où les coefficients A et B sont donnés par les formules suivantes

$$\begin{aligned}
 A &= (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left[(p + p') \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^{\frac{n+1}{2}} + (p' - p) \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \\
 &\quad + i(1 - w^2)^{\frac{1}{2}} \left[(q + q') \left(\frac{1 - w}{1 + w} \right)^{\frac{n+1}{2}} + (q' - q) \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \\
 B &= (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left[(p + p') \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right)^{\frac{n-1}{2}} + (p' - p) \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right] \\
 &\quad + i(1 - w^2)^{\frac{1}{2}} \left[(q + q') \left(\frac{1 - w}{1 + w} \right)^{\frac{n-1}{2}} + (q' - q) \left(\frac{1 + w}{1 - w} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà souligné, notre étude sera faite dans le cadre des solutions radiales (le prolongement analytique nous permettant de passer aisément au cas des solutions axi-symétriques). Les exemples de collisions d'ondes planes gravitationnelles constitueront un terrain idéal pour tester la méthode de résolution algébrique que nous développerons par la suite.

1.7 Conclusion

Comme nous avons pu le montrer au cours de cette brève présentation, la gravité réduite à deux dimensions dans le vide présente de nombreux intérêts. D'un point de vue physique, elle englobe un grand nombre de solutions importantes (dont les plus connues) et ceci, malgré un cadre de travail restrictif. D'un point de vue théorique, l'existence d'un groupe de symétrie infini nous laisse espérer que ce secteur de la gravité soit intégrable. Nous allons voir dans les prochains chapitres comment ce dernier permet d'engendrer des solutions du problème d'une manière purement algébrique.

L'alliance de cet intérêt physique et de ces propriétés mathématiques explique sûrement l'attrait de ce modèle pour la communauté des physiciens. Le grand espoir serait que ses qualités puissent permettre un passage plus aisé vers la quantification et ainsi, à défaut d'une formulation quantique de la gravitation, de pouvoir développer une meilleure compréhension de ce domaine.

Chapitre 2

Intégrabilité du modèle

Sommaire

2.1	(Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (1/2)	19
2.2	La méthode de Belinski et Zakharov	22
2.2.1	Principe de la méthode	22
2.2.2	Les solutions à un soliton	24
2.2.3	Généralisation et conclusions	26
2.3	Le modèle sigma	27
2.3.1	Généralités sur le modèle sigma bosonique	27
2.3.2	Modèle sigma pour la gravité réduite	28
2.4	Connexion de Lax	29
2.4.1	Résultat fondamental	29
2.4.2	Solution du vide	30
2.5	Transformations d'habillage appliquées à la gravité	31
2.5.1	Formules générales	32
2.5.2	Engendrer l'ensemble des solutions	33
2.5.3	Groupe de Geroch et transformations d'habillage	35

2.1 (Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (1/2)

Il était impossible dans cette thèse sur l'intégrabilité de la gravité réduite, de ne pas décrire la théorie des systèmes intégrables. Cette section a pour dessein de rappeler quelques notions et terminologies à ce sujet. Une deuxième partie présentée au chapitre 4 sera dédiée à la structure symplectique et viendra compléter cette introduction. Une présentation complète pourra être trouvée par exemple, dans le cours des Houches de Faddeev [25] ou dans [30]. Dans un objectif de simplicité, les notions développées s'appuieront sur la physique qui nous intéresse plus particulièrement, celle concernant une théorie classique des champs dans un espace bidimensionnel (t, x) .

Par définition, un système défini par un Hamiltonien \mathcal{H} avec n degré de liberté est intégrable s'il existe une famille de n quantités $\{\mathcal{I}_i\}$ définies globalement, Poisson-commutant et conservées

$$\{\mathcal{I}_i, \mathcal{I}_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\mathcal{H}, \mathcal{I}_i\} = 0$$

Considérons un problème physique avec n champs ϕ_i et défini par m équations du mouvement

$$\mathcal{F}_j(\phi_1(x, t), \dots, \phi_n(x, t), x, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Dans une majorité de cas (dont celui qui nous intéressera par la suite), il est possible d'exprimer ces équations du mouvement sous la forme de Lax, c'est à dire de les formuler comme une condition de courbure nulle pour une dérivée covariante. Soit D_x et D_t les composantes de cette dérivée covariante, la forme de Lax s'écrit alors

$$[D_x, D_t] = 0 \quad (2.1)$$

Les expressions développées de D_x et D_t

$$D_x = \partial_x + A_x(x, t, \lambda) \quad \text{et} \quad D_t = \partial_t + A_t(x, t, \lambda) \quad (2.2)$$

font apparaître les composantes de la connexion de Lax A_x et A_t . Cette connexion dépend donc a priori des champs ϕ_i et des coordonnées d'espace-temps. Nous avons en plus introduit un paramètre spectral complexe λ . Pour déterminer la connexion de Lax, la méthode générale consiste à résoudre le système auxiliaire

$$D_x \Psi(x, t, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad D_t \Psi(x, t, \lambda) = 0 \quad (2.3)$$

Il est en effet trivial de démontrer que les composantes ainsi obtenues

$$A_x = -(\partial_x \Psi) \Psi^{-1} \quad \text{et} \quad A_t = -(\partial_t \Psi) \Psi^{-1} \quad (2.4)$$

satisfont bien la condition de courbure nulle (2.1).

Nous ne parlerons pas ici du rôle de la connexion de Lax dans la méthode pour obtenir une famille de quantités conservées. Nous nous concentrerons sur la description d'une technique permettant d'obtenir de nouvelles solutions du système auxiliaire à partir d'une solution connue. Cette méthode fut introduite par Zakharov et Shabat [29]. Avant de la présenter, nous allons rappeler la définition du problème de Riemann-Hilbert.

Soit une matrice $G(\lambda)$ définie sur une courbe Γ dans le plan complexe λ . Un puissant théorème nous permet d'écrire la décomposition suivante

$$G(\lambda) = \Theta_{ext}^{-1}(\lambda) \Theta_{int}(\lambda) \quad (2.5)$$

où Θ_{int} est une matrice analytique à l'intérieur du contour Γ et Θ_{ext} une matrice analytique à l'extérieur du contour Γ . Ces deux matrices sont non dégénérées et définies à une matrice constante g près

$$\Theta_{ext,int} \longrightarrow g \Theta_{ext,int} \quad (2.6)$$

Revenons à notre problème et considérons maintenant une solution connue Ψ_0 , A_{x0} et A_{t0} du système (2.3), une courbe Γ dans le plan complexe λ et une matrice $G_0(\lambda)$ définie sur Γ . Posons

$$G(x, t, \lambda) = \Psi_0(x, t, \lambda) G_0(\lambda) \Psi_0^{-1}(x, t, \lambda) \quad (2.7)$$

Nous pouvons décomposer G en suivant (2.5). Considérons maintenant les fonctions d'onde $\Psi_{ext,int}$ définies par

$$\Psi_{ext,int} = \Theta_{ext,int} \Psi_0 G_{0,ext,int}^{-1}(\lambda) \quad (2.8)$$

avec la décomposition

$$G_0(\lambda) = G_{0\ ext}^{-1}(\lambda) G_{0\ int}(\lambda) \quad (2.9)$$

Ces fonctions d'onde vérifient les équations du système auxiliaire si nous prenons pour la connexion de Lax

$$A_{x\ ext,int} = \Theta_{ext,int} \partial_x \Theta_{ext,int}^{-1} + \Theta_{ext,int} A_{x0} \Theta_{ext,int}^{-1} \quad (2.10)$$

$$A_{t\ ext,int} = \Theta_{ext,int} \partial_t \Theta_{ext,int}^{-1} + \Theta_{ext,int} A_{t0} \Theta_{ext,int}^{-1} \quad (2.11)$$

L'intérêt de la décomposition se voit directement sur les formules ci-dessus. Si G appartient à un groupe tel que $\Theta_{ext,int}$ soit un élément d'un groupe transformation de jauge sous lequel la connexion se transforme de manière covariante (ce qui revient à dire que la structure analytique de la connexion est préservée) nous avons alors une méthode pour engendrer de nouvelles solutions. Pour que ceci soit valide, il faut que la connexion soit définie de manière unique sur la courbe Γ , c'est à dire

$$A_{x\ ext}(x, t, \lambda) = A_{x\ int}(x, t, \lambda), \quad A_{t\ ext}(x, t, \lambda) = A_{t\ int}(x, t, \lambda) \quad \text{pour } \lambda \in \Gamma \quad (2.12)$$

On vérifie aisément à l'aide de (2.7), (2.9) et (2.8), que $\Psi_{int}^{-1} \Psi_{ext} = I$ sur Γ . En utilisant l'identité (2.4), nous en déduisons (2.12). En fait cette relation est valable globalement. Pour obtenir ce résultat, dérivons les deux expressions de G , (2.5) et (2.7), par rapport à x

$$-\Theta_{ext}^{-1} \partial_x \Theta_{ext} \Theta_{ext}^{-1} \Theta_{int} + \Theta_{ext}^{-1} \partial_x \Theta_{int} = G A_{x0} - A_{x0} G$$

En reformulant cette dernière identité

$$\Theta_{ext}^{-1} (\Theta_{ext} \partial_x \Theta_{ext}^{-1} + \Theta_{ext} A_{x0} \Theta_{ext}^{-1}) \Theta_{int} = \Theta_{ext}^{-1} (\Theta_{int} \partial_x \Theta_{int}^{-1} + \Theta_{int} A_{x0} \Theta_{int}^{-1}) \Theta_{int}$$

nous arrivons au résultat précédemment annoncé pour la composante de la connexion suivant x . Un calcul analogue peut être mené pour la composante suivant t . Compte tenu de cette propriété et de la relation équivalente qui en découle pour la fonction d'onde, nous poserons

$$A_x \equiv A_{x\ int} = A_{x\ ext} \quad (2.13)$$

$$A_t \equiv A_{t\ int} = A_{t\ ext} \quad (2.14)$$

$$\Psi = \Psi_{int} = \Psi_{ext} \quad (2.15)$$

Une telle transformation est appelée transformation d'habillage. Elle agit dans l'espace des solutions. Nous allons montrer qu'il existe une loi de composition pour les éléments G_0 telle que pour les transformations associées, elle soit équivalente à la loi de composition usuelle. Pour cela considérons deux transformations g et h associées aux décompositions $\Theta_{ext,int}^g$ et $\Theta_{ext,int}^h$ et aux deux éléments H_0 et G_0 d'un groupe comme défini précédemment, et regardons l'action successive de ces deux transformations sur un état Ψ_0

$$\Psi_0 \xrightarrow{g} \Psi^g \xrightarrow{h} \Psi^{h \bullet g}$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Psi_{ext,int}^{h \bullet g} &= \Theta_{ext,int}^{hg} \Psi^g H_{0\ ext,int}^{-1} \\ &= \Theta_{ext,int}^{hg} \Theta_{ext,int}^g \Psi_0 (H_{0\ ext,int} G_{0\ ext,int})^{-1} \end{aligned}$$

Le premier terme de l'identité étant défini par

$$\begin{aligned} \left(\Theta_{ext}^{hg}\right)^{-1} \Theta_{int}^{hg} &= \Psi^g H_0 (\Psi^g)^{-1} \\ &= \Theta_{ext}^g \Psi_0 (H_0 \text{ }_{ext} G_0 \text{ }_{ext})^{-1} (H_0 \text{ }_{int} G_0 \text{ }_{int}) \Psi_0^{-1} (\Theta_{int}^g)^{-1} \end{aligned}$$

(en ayant utilisé les deux définitions de Ψ^g). En insérant cette forme développée dans l'expression de $\Psi_{ext,int}^{h\bullet g}$, nous obtenons la loi de composition

$$H_0 \bullet G_0 = (H_0 \text{ }_{ext} G_0 \text{ }_{ext})^{-1} (H_0 \text{ }_{int} G_0 \text{ }_{int}) \quad (2.16)$$

Grâce à cette loi, il est aisé de montrer que les transformations d'habillage forment un groupe agissant sur l'espace des solutions du système auxiliaire.

2.2 La méthode de Belinski et Zakharov

L'article de Belinski et Zakharov [1] fut le premier à décrire une méthode générale pour engendrer les solutions de la gravité réduite à deux dimensions dans le vide. Nous allons dans ce qui suit, retracer les grandes lignes de cette méthode et expliciter un cas concret : les solutions à un soliton.

2.2.1 Principe de la méthode

Le point de départ est constitué des équations du mouvement (1.3-1.13). Comme dans toutes les méthodes ayant trait à notre modèle, nous nous donnons le champ harmonique ρ . Dans [1], le facteur conforme est obtenu par intégration de l'équation (1.13). Ainsi, il ne reste plus qu'à déterminer la petite métrique S . Pour calculer cette quantité Belinski et Zakharov proposent la paire de Lax suivante :

$$A_+ = -2 \frac{\lambda \partial_+ \rho}{\lambda - \rho} \partial_\lambda + \frac{\partial_+ (\rho S) S^{-1}}{\lambda - \rho} \quad (2.17)$$

$$A_- = 2 \frac{\lambda \partial_- \rho}{\lambda + \rho} \partial_\lambda - \frac{\partial_- (\rho S) S^{-1}}{\lambda + \rho} \quad (2.18)$$

où λ est un paramètre spectral complexe ne dépendant pas des coordonnées.

Par un calcul direct, il est aisé de montrer que la condition de courbure nulle pour les dérivées covariantes

$$D_+ = \partial_+ + A_+ \quad \text{et} \quad D_- = \partial_- + A_- \quad (2.19)$$

redonne bien l'équation du mouvement (1.8).

Nous allons maintenant considérer le système auxiliaire

$$D_+ \Psi(z_+, z_-, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad D_- \Psi(z_+, z_-, \lambda) \quad (2.20)$$

Comment obtenir S à l'aide de la fonction d'onde Ψ ? Pour $\lambda = 0$, on remarque que

$$\Psi(z_+, z_-, 0) = \rho S$$

est solution de (2.20). Ainsi, moyennant un certain nombre de conditions pour que ρS soit une matrice réelle symétrique, la connaissance de la fonction d'onde nous permet de déterminer la métrique.

Pour intégrer l'équation (2.20), il est nécessaire de connaître au moins une solution particulière. Cette dernière nous fixe le champ ρ . En effet, les transformations que nous appliquerons ne modifieront pas ρ . Le dilaton sera identique pour toutes les solutions qui découleront de la solution particulière. Nous utiliserons l'indice 0 pour les grandeurs calculées à partir de cette solution de départ, en particulier la petite métrique S_0 et la fonction d'onde associée Ψ_0 . Introduisons la matrice χ définie par

$$\chi = \Psi \Psi_0^{-1} \quad (2.21)$$

χ obéit aux équations dérivées de (2.20)

$$\left(\partial_+ - 2 \frac{\lambda \partial_+ \rho}{\lambda - \rho} \partial_\lambda \right) \chi = -\frac{1}{\lambda - \rho} \left(\partial_+ (\rho S) S^{-1} \chi - \chi \partial_+ (\rho S_0) S_0^{-1} \right) \quad (2.22)$$

$$\left(\partial_- + 2 \frac{\lambda \partial_- \rho}{\lambda + \rho} \partial_\lambda \right) \chi = \frac{1}{\lambda + \rho} \left(\partial_- (\rho S) S^{-1} \chi - \chi \partial_- (\rho S_0) S_0^{-1} \right) \quad (2.23)$$

Pour que les solutions que nous allons obtenir soient physiques, il faut imposer un certain nombre de conditions sur χ . Nous requérons tout d'abord que χ soit réelle pour des valeurs réelles du paramètre spectral

$$\bar{\chi}(\bar{\lambda}) = \chi(\lambda) \quad (2.24)$$

où la barre au dessus des grandeurs correspond à l'opération de conjugaison. Ainsi la petite métrique S sera réelle. Cette dernière doit aussi être symétrique. Pour cela, considérons la matrice χ' définie par

$$\chi'(\lambda) = S \chi \left(\frac{\rho^2}{\lambda} \right) S_0^{-1} \quad (2.25)$$

Si nous imposons que cette quantité soit égale à χ , il est alors aisé de démontrer à l'aide des équations (2.22-2.23) que la matrice S ainsi obtenue est symétrique. Cette condition nous permet aussi d'évaluer facilement S à partir de χ . En choisissant

$$\chi(\infty) = I \quad (2.26)$$

nous obtenons ainsi la formule pratique

$$S = \chi(0) S_0 \quad (2.27)$$

La dernière contrainte provient de la normalisation de S . Pour que celle-ci soit vérifiée, il est nécessaire que $\det(\chi(0))$ soit égal à 1. En fait, il est possible de montrer qu'au cas où cette dernière condition n'est pas respectée, il est possible de redéfinir les quantités obtenues pour obtenir une petite métrique correctement normalisée.

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de reformuler notre problème sans pour autant le résoudre. Il s'agit maintenant de déterminer la matrice χ . Résoudre les équations (2.22-2.23) revient à résoudre le problème de Riemann-Hilbert, comme nous l'avons vu dans la section précédente. Nous nous limiterons ici au cas le plus simple, celui correspondant aux solutions de type solitons. De telles solutions proviennent de l'existence de valeurs du paramètre spectral où la matrice χ est dégénérée, de telle sorte que χ^{-1} ait des pôles (supposés simples et en nombre fini) en ces points. Sous cette hypothèse, et en utilisant (2.26) et (2.24), nous pouvons écrire χ^{-1} comme une somme finie de fonctions rationnelles de λ

$$\chi^{-1} = I + \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_i}{\lambda - \nu_i} + \frac{\bar{S}_i}{\lambda - \bar{\nu}_i} \right) \quad (2.28)$$

En utilisant la relation (2.25), nous déduisons que χ possède le même nombre de pôles pour des valeurs de λ μ_i telles que $\mu_i = \rho^2/\nu_i$. Ainsi, nous pouvons écrire pour χ le même type de décomposition

$$\chi = I + \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{\lambda - \mu_i} + \frac{\bar{R}_i}{\lambda - \bar{\mu}_i} \right) \quad (2.29)$$

Pour faire le lien avec le langage de la section (2.1), il suffit de considérer que la courbe Γ est située à l'infini (ce qui est justifié de par l'hypothèse du nombre fini de singularités) et de poser

$$\Theta_{int} = \chi, \quad \Theta_{ext} = I \quad \text{et} \quad G_0 = I$$

En appliquant sur la relation (2.29), les équations (2.22-2.23) et en identifiant les pôles du second ordre, nous en déduisons les équations pour les pôles

$$\partial_+ \mu_i = \frac{2 \partial_+ \rho \mu_i}{\rho - \mu_i} \quad \text{et} \quad \partial_- \mu_i = \frac{2 \partial_- \rho \mu_i}{\rho + \mu_i} \quad (2.30)$$

Pour résoudre ce système, nous allons tout d'abord faire une remarque sur ρ . Ce champ étant harmonique d'après (1.3), nous pouvons le mettre sous la forme

$$\rho(z_+, z_-) = a(z_+) + b(z_-) \quad (2.31)$$

La résolution du système (2.30) est équivalent à la détermination des racines de l'équation

$$(a + b)^2 \mu_i^{-1} + 2(a - b) + \mu_i = 2w_i \quad (2.32)$$

où w est une constante d'intégration. Nous obtenons ainsi deux solutions

$$\mu_{+i} = w_i - a + b - \left((w_i - a + b)^2 - (a + b)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

$$\mu_{-i} = w_i - a + b + \left((w_i - a + b)^2 - (a + b)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

vérifiant la relation

$$\mu_{+i} \mu_{-i} = \rho^2$$

De la même manière que pour les pôles, nous pouvons obtenir les équations pour les matrices R_i

$$\partial_+ R_i \chi^{-1}(\mu_i) - R_i \frac{\partial_+(\rho S_0) S_0^{-1}}{\mu_i - \rho} \chi^{-1}(\mu_i) = 0 \quad (2.35)$$

$$\partial_- R_i \chi^{-1}(\mu_i) + R_i \frac{\partial_-(\rho S_0) S_0^{-1}}{\mu_i - \rho} \chi^{-1}(\mu_i) = 0 \quad (2.36)$$

Dans un but pédagogique, nous allons étudier la méthode pour obtenir les matrices R_i dans le détail uniquement pour le cas le plus simple.

2.2.2 Les solutions à un soliton

2.2.2.1 Cas générique

Le cas à un soliton est la solution la plus simple de (2.22-2.23). Puisqu'il n'y a qu'un seul pôle, celui-ci est réel d'après (2.24). Nous le noterons μ et sera défini par

$$\mu = w - a + b - \left((w - a + b)^2 - (a + b)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

La matrice χ se réduit dans le cas à présent à l'expression suivante

$$\chi = I + \frac{R}{\lambda - \mu} \quad (2.38)$$

De par la relation (2.24), la matrice R est réelle. Elle est de plus une matrice dégénérée. Cette dernière remarque est d'ailleurs valable pour les R_i de manière générale. En effet, grâce à l'égalité $\chi\chi^{-1} = I$ et (2.38), nous obtenons

$$R\chi^{-1}(\mu) = 0 \quad (2.39)$$

Nous pouvons ainsi écrire R comme un produit de vecteurs $R = nm^t$. Dans un premier temps, nous allons déterminer le vecteur m . Pour cela, remarquons que la matrice $\Psi_0^{-1}(\mu)$ vérifie les équations

$$\begin{aligned} \partial_+ \Psi_0^{-1}(\mu) - \Psi_0^{-1}(\mu) \frac{\partial_+(\rho S_0) S_0^{-1}}{\mu - \rho} &= 0 \\ \partial_- \Psi_0^{-1}(\mu) + \Psi_0^{-1}(\mu) \frac{\partial_-(\rho S_0) S_0^{-1}}{\mu + \rho} &= 0 \end{aligned}$$

Si nous choisissons le vecteur m de la forme $m^t = m_0^t \Psi_0^{-1}(\mu)$ où m_0 est un vecteur constant, alors les équations (2.35-2.36) sont vérifiées. Notons que m_0 doit être réel pour que m et par conséquent R le soient aussi. Pour déterminer n , nous utiliserons la propriété (2.25) pour $\lambda = \rho^2/\mu$. Nous en déduisons la relation suivante

$$R S_0 = I + \frac{\mu R^t}{\rho^2 - \mu^2} \quad (2.40)$$

Ceci implique pour le vecteur n l'identité

$$n = \frac{(\mu^2 - \rho^2) S_0^t m}{\mu (m^t S_0 m)} \quad (2.41)$$

Ceci nous permet d'obtenir une formule explicite pour la matrice S (après renormalisation)

$$S = \left(\frac{\mu}{\rho} I - \frac{\mu^2 - \rho^2}{\rho \mu} \right) S_0 \quad (2.42)$$

où le projecteur P est défini par

$$P = \frac{1}{m^t S_0 m} m (m^t S_0) \quad (2.43)$$

La dernière étape consiste maintenant à intégrer l'équation (1.14) pour obtenir le facteur conforme. Ce calcul est relativement long, mais dans le cas à un soliton, donne un résultat relativement simple.

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \log(\mu (m^t S_0 m)) - \frac{1}{2} \log(\rho (w - 2a) (w + 2b)) + \text{cte} \quad (2.44)$$

2.2.2.2 Application

Dans le but de comparer notre méthode à celle présentée ici, nous allons décrire l'exemple concret donné dans l'article [1].

La solution de départ choisie est celle de Kasner. Cette dernière est la métrique la plus simple pour décrire un univers en expansion anisotrope. Elle peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = t^{p_1^2 + p_2^2 - 1} (dx^2 - dt^2) t^{2p_1} dy^2 + t^{2p_2} dz^2 \quad (2.45)$$

Avec les constantes p_1 et p_2 vérifiant l'identité $p_1 + p_2 = 1$. Pour que cette métrique soit reproduite par nos notations, posons

$$\begin{aligned}\rho &= t \\ \hat{\sigma}_0 &= \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{2}) \log \rho \\ S_0 &= \begin{pmatrix} \rho^{2p_1-1} & 0 \\ 0 & \rho^{2p_2-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous en déduisons les expressions des dérivées covariantes (2.19)

$$\begin{aligned}D_+ &= \partial_+ - \frac{\sqrt{2} \lambda \partial_\lambda}{\lambda - t} + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda - t} \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \\ D_- &= \partial_- - \frac{\sqrt{2} \lambda \partial_\lambda}{\lambda + t} + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda + t} \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.46}$$

Grâce à ces expressions, il est aisé de montrer que la fonction d'onde

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} (t^2 + 2x\lambda + \lambda^2)^{p_1} & 0 \\ 0 & (t^2 + 2x\lambda + \lambda^2)^{p_2} \end{pmatrix}$$

est solution du système auxiliaire. La dernière étape consiste à appliquer la méthode de la sous-section précédente pour engendrer une nouvelle solution. En posant

$$e^{\frac{r}{2}} = \frac{(z - w)}{t} - \sqrt{\frac{(z - w)^2}{t^2} - 1}$$

nous obtenons alors la métrique

$$\begin{aligned}ds^2 &= \frac{t^{2q^2} \cosh(qr + C)}{\sqrt{(x - w)^2 + t^2}} (-dt^2 + dx^2) + \frac{\cosh((\frac{1}{2} + q)r + C)}{\cosh(qr + C)} t^{1+2q} dy^2 \\ &\quad - \frac{2 \sinh(\frac{r}{2})}{\cosh(qr + C)} t dy dz + \frac{\cosh((\frac{1}{2} - q)r - C)}{\cosh(qr + C)} t^{1-2q} dz^2\end{aligned}\tag{2.47}$$

avec $p_1 = \frac{1}{2} + q$ et $p_2 = \frac{1}{2} - q$ et C une constante arbitraire.

Le prolongement analytique de cette métrique s'interprète comme la solution associée à une onde gravitationnelle cylindrique arrivant sur l'axe (Ox) et se réfléchissant sur celui-ci. Une discussion de la physique de cette solution pourra être trouvée dans [1].

2.2.3 Généralisation et conclusions

Bien que l'étude précédente portait essentiellement sur le cas à un soliton, la plupart des identités citées restent encore valables pour N solitons. La seule difficulté réside dans la complexité croissante des calculs et plus particulièrement celui concernant l'intégration des équations pour le facteur conforme.

Un grand nombre de méthodes pour engendrer ce type de métrique furent décrites par la suite. Parmi elles, nous pouvons citer celle de P. Letelier [6, 7, 8] où les éléments de la matrice S sont exprimés sous la forme de rapport de déterminants. Malheureusement, ces formules nécessitent toujours l'évaluation d'au moins une intégrale généralement non triviale.

La suite de ce chapitre aura pour but de poser les fondations d'une méthode basée sur une nouvelle paire de Lax grâce à laquelle nous arriverons à surpasser cette dernière difficulté.

2.3 Le modèle sigma

2.3.1 Généralités sur le modèle sigma bosonique

Le modèle sigma non-linéaire bosonique fut introduit à la fin des années 1960 dans le domaine de la physique nucléaire [20]. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent (1), les équations de la gravité réduite à deux dimensions dans le vide peuvent être dérivées d'un tel modèle. Nous allons dans ce paragraphe en faire une succincte description, inspirée de celle présentée dans [21].

Considérons la décomposition d'une algèbre de Lie \mathfrak{g}

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k} \quad (2.48)$$

où \mathfrak{h} est l'algèbre de Lie du sous groupe compact maximal \mathbf{H} du groupe de Lie \mathbf{G} . De par la définition d'un sous groupe compact maximal, nous avons les identités suivantes

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h}$$

Ces dernières relations nous seront utiles lors de la décomposition des équations sur chacun des sous-espaces.

Soit maintenant un champ bosonique $\mathcal{V}(x)$ prenant ses valeurs dans le groupe \mathbf{G} . Pour réduire le nombre de degrés de liberté, nous imposons que la physique soit invariante lorsque ce champ est conjugué à droite par un élément constant de \mathbf{G} ou à gauche par un élément de \mathbf{H} dépendant des coordonnées

$$\mathcal{V}(x) \longrightarrow H(x)\mathcal{V}(x)G$$

Cette dernière invariance de jauge permet d'éliminer les degrés de liberté non physique. La terminologie non-linéaire de ce modèle provient de la réalisation de la symétrie. Toute action à droite doit être compensée par une transformation de jauge pour conserver un choix de jauge donné.

Quel Lagrangien pouvons-nous construire pour un tel système? Nous supposons que notre champ est défini dans un espace à N dimensions avec une métrique g_{ij} . Dans un premier temps, considérons la quantité $\mathcal{V}\partial_i\mathcal{V}^{-1}$. Cette dernière est à valeur dans l'algèbre de Lie \mathbf{G} et nous pouvons écrire la décomposition

$$\mathcal{V}\partial_i\mathcal{V}^{-1} = P_i + Q_i \quad (2.49)$$

avec $P_i \in \mathfrak{k}$ et $Q_i \in \mathfrak{h}$. $\mathcal{V}\partial_i\mathcal{V}^{-1}$ est très clairement invariante par les transformations globales. Regardons comment se comportent ces champs sous les transformations de jauge

$$P_i \longrightarrow H P_i H^{-1} \quad (2.50)$$

$$Q_i \longrightarrow H Q_i H^{-1} + H\partial_i H^{-1} \quad (2.51)$$

Ainsi la composante Q_i se transforme comme un champ de jauge. Le Lagrangien du système se met sous la forme suivante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \sqrt{\det |g|} g^{ij} \text{tr} (P_i P_j) \quad (2.52)$$

Ce Lagrangien est par construction invariant sous les symétries imposées. En introduisant les dérivées covariantes par rapport à \mathbf{H} , $D_i = \partial_i + [Q_i, \cdot]$, les équations du mouvement qui en découlent sont

$$D_i \left(\sqrt{\det |g|} g^{ij} P_j \right) = 0 \quad (2.53)$$

En plus de cette équation, nous devons aussi tenir compte de la relation de compatibilité issue de la décomposition (2.49). Ainsi

$$\partial_i Q_j - \partial_j Q_i + [P_i, P_j] + [Q_i, Q_j] = 0 \quad (2.54)$$

$$D_i P_j - D_j P_i = 0 \quad (2.55)$$

Nous allons maintenant appliquer ces résultats à la gravité réduite.

2.3.2 Modèle sigma pour la gravité réduite

Dans notre cas, le groupe sur lequel est basé le modèle sigma non-linéaire est $SL(2, \mathbb{R})$. Le sous groupe compact maximal associé est alors $SO(2)$. Notons que ce sous groupe est abélien, ce qui simplifie la tranformation de jauge (2.51). Le zweibein (1.11) fournit naturellement le champ bosonique. La décomposition prend alors la forme

$$\mathcal{V} \partial_{\pm} \mathcal{V}^{-1} = P_{\pm} + Q_{\pm} \quad (2.56)$$

Concrètement, ceci correspond à séparer la matrice de trace nulle en une partie symétrique (sur \mathbf{k}) et une partie antisymétrique (sur $so(2)$). A l'aide de ces champs, nous pouvons réécrire les équations du mouvement (1.8-1.10)

$$\partial_+ \partial_- \rho = 0 \quad (2.57)$$

$$D_+ (\rho P_-) + D_- (\rho P_+) = 0 \quad (2.58)$$

$$\partial_- Q_+ - \partial_+ Q_- = [P_+, P_-] \quad (2.59)$$

$$D_- P_+ - D_+ P_- = 0 \quad (2.60)$$

$$\partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \hat{\sigma} = \frac{1}{2} \rho \text{tr} (P_{\pm} P_{\pm}) \quad (2.61)$$

La deuxième équation est identique à celle obtenue en (2.53) en utilisant la métrique (1.2) et on retrouve les conditions d'intégrabilité (2.54-2.55). On vérifie aisément en insérant la forme de la métrique et en ajoutant un terme à (2.52), que le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \text{tr} (P_+ P_-) - \frac{1}{2} (\partial_+ \hat{\sigma} \partial_- \rho + \partial_- \hat{\sigma} \partial_+ \rho) \quad (2.62)$$

nous redonne les équations du mouvement. Pour être plus précis, ce dernier ne donne pas directement (2.61) mais une équation du second ordre qui en dérive

$$\partial_+ \partial_- \hat{\sigma} = -\frac{1}{2} \text{tr} (P_+ P_-) \quad (2.63)$$

Pour la suite de cet exposé, il sera utile d'exprimer ces quantités dans le cas de la jauge triangulaire, à l'aide des champs introduits pour la paramétrisation de Papetrou (1.12).

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (\Delta^{-1} \partial_{\pm} \Delta) \sigma^z + \frac{1}{2} \Delta \partial_{\pm} N (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (2.64)$$

$$Q_{\pm} = -\frac{1}{2} \Delta \partial_{\pm} N (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.65)$$

en ayant introduit les matrices de Pauli

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

A titre de remarque, la majorité des résultats présentés dans cette section peuvent être généralisés à d'autres types de gravité et supergravité réduite. Seuls changent alors les groupes sur lesquels repose le modèle sigma. Nous reviendrons sur cette possible généralisation au chapitre 4.

2.4 Connexion de Lax

Cette section constitue les fondations de l'ensemble des travaux présentés dans cette thèse. Nous allons décrire la paire de Lax obtenue dans [26] et [16]. Nous montrerons en quoi elle se différencie de celle de Belinskii et Zakharov et quelles sont ses propriétés.

2.4.1 Résultat fondamental

La paire de Lax que nous emploierons est à valeur dans le produit semi-direct de l'algèbre de Kac-Moody $sl(2, \mathbb{R})$ affine twistée avec l'algèbre de Virasoro que nous noterons \mathcal{G}_{vir} . Nous noterons cette algèbre \mathcal{VG} . L'algèbre de Kac-Moody $sl(2, \mathbb{R})$ affine twistée a déjà été présentée au cours du chapitre 1. L'algèbre de Virasoro dont les générateurs seront notés L_n , est définie par les relations de commutation

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + n(n^2 - 1) \frac{c}{12} \delta_{n+m,0} \quad (2.67)$$

où c est la charge centrale de l'algèbre. Les crochets de Lie entre les deux algèbres sont

$$[L_n, X\lambda^m] = -\frac{m}{2} X\lambda^{2n+m} \quad (2.68)$$

Dans le but de simplifier les notations, nous allons introduire deux éléments particuliers de l'algèbre de Virasoro

$$E_+ = L_0 - L_1 \quad \text{et} \quad E_- = L_0 - L_{-1} \quad (2.69)$$

Ces deux éléments vérifient en particulier les relations de commutation suivantes qui seront très usitées par la suite

$$[E_+, E_-] = E_+ + E_- \quad (2.70)$$

$$[E_{\pm}, X\lambda^m] = -\frac{m}{2} X (1 - \lambda^{\pm 2}) \lambda^m \quad (2.71)$$

La paire de Lax proposée dans [16] est la suivante

$$A_{\pm} = \pm \rho^{-1} \partial_{\pm} \rho E_{\pm} + Q_{\pm} + P_{\pm} \lambda^{\pm 1} \mp (\partial_{\pm} \hat{\sigma}) \frac{k}{2} \quad (2.72)$$

Vérifions que la condition de courbure nulle nous redonne bien les équations du mouvement. Les différents commutateurs à évaluer sont

$$\begin{aligned} [A_+, A_-] &= -\rho^2 \partial_+ \rho \partial_- \rho (E_+ + E_-) - [Q_-, P_+] \lambda + [Q_+, P_-] \lambda^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho (\partial_+ \rho) P_- (\lambda - \lambda^{-1}) + \frac{1}{2} \rho (\partial_- \rho) P_+ (\lambda - \lambda^{-1}) \\ [\partial_{\pm}, A_{\mp}] &= \pm \rho^2 \partial_+ \rho \partial_- \rho E_{\mp} + \partial_{\pm} P_{\mp} \lambda^{\mp 1} + \partial_{\pm} Q_{\mp} \pm \partial_+ \partial_- \hat{\sigma} \frac{k}{2} \end{aligned}$$

La décomposition sur chacun des générateurs nous redonne bien les équations (2.58-2.60) et (2.63).

La paire de Lax (2.72) peut être divisée en deux parties. Une première est constituée de la projection sur les éléments de l'algèbre \mathcal{G}_{aft} en excluant ceux sur l'extension centrale

$$Q_{\pm} + P_{\pm} \lambda^{\pm 1}$$

Moyennant une conjugaison que nous décrirons dans le prochain chapitre lors de la comparaison de notre méthode avec celle de [1], cette partie est équivalente à (2.17-2.18). Le morceau restant est composé de la partie sur l'extension centrale et sur l'algèbre de Virasoro

$$\pm \rho^{-1} \partial_{\pm} \rho E_{\pm} \mp (\partial_{\pm} \hat{\sigma}) \frac{k}{2}$$

Le terme sur l'extension centrale permet de réintroduire le facteur conforme dans les équations produites par la condition de courbure nulle. Contrairement aux autres méthodes où ce facteur était obtenu a posteriori par l'intégration de l'équation de Ernst correspondante, toute technique nous permettant la résolution algébrique du système auxiliaire associé à cette nouvelle paire de Lax va permettre d'obtenir simultanément la petite métrique et le facteur conforme. L'intérêt du terme sur l'algèbre de Virasoro est plus subtile. A première vue et sans refaire explicitement le calcul, l'expression aurait pu laisser suggérer qu'elle servait à reproduire l'équation pour ρ . Il n'en est rien. Le dilaton est toujours ici un champ harmonique supposé donné. Comme nous le verrons par la suite, ce terme a pour but de découpler la dépendance des pôles vis-à-vis des coordonnées spatio-temporelles.

Regardons quelques propriétés de la connexion. Elle se transforme de manière covariante sous les transformations de jauge

$$A_{\pm} \longrightarrow H A_{\pm} H^{-1} + H \partial_{\pm} H^{-1} \quad (2.73)$$

Ceci implique que la fonction d'onde se transforme aussi de manière covariante

$$\Psi \longrightarrow H \Psi \quad (2.74)$$

Nous avons vu que A_{\pm} était un élément de l'algèbre \mathcal{VG} . En fait, nous pouvons constater que chaque composante se décompose sous deux sous-algèbres de Borel différentes

$$A_{\pm} \in (\mathbb{C}E_{\pm} \oplus \mathcal{B}_{\pm} \oplus \mathbb{C}k)$$

2.4.2 Solution du vide

Avant de présenter la méthode que nous allons utiliser pour résoudre le système auxiliaire, nous allons nous intéresser à une solution particulière de ce dernier : la solution du vide. Quelle est la solution non triviale la plus simple des équations du mouvement (2.57-2.61) ? Il suffit de considérer un champ harmonique ρ et toutes les autres quantités égales à zéro

$$P_{\pm} = Q_{\pm} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = 0$$

pour obtenir une telle solution, que nous appellerons solution du vide. Cette dénomination usuelle ne signifie pas que les autres solutions ne sont pas des solutions de la relativité dans le vide (au sens absence de matière), elle indique juste que la connexion est nulle. Physiquement cette solution correspond à la métrique duale de celle de l'espace plat de Minkowski. Ceci se voit directement à partir des relations de dualité (1.18) en posant

$$e^{2\hat{\sigma}} = \rho^{\frac{1}{2}}, \quad N = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = \rho^{-1}$$

Dans la suite de cet exposé, nous utiliserons l'indice v pour indiquer les quantités associées à cette solution. La paire de Lax qui en découle, se réduit à la partie sur Virasoro

$$A_{v\pm} = \pm \rho^{-1} \partial_{\pm} \rho E_{\pm} \quad (2.75)$$

La fonction d'onde associée Ψ_v vérifie la relation (2.4)

$$(\partial_{\pm} \Psi_v) \Psi_v^{-1} = -A_{v\pm}$$

Cherchons une solution sous la forme

$$\Psi_v = \exp(\alpha E_+) \exp(\beta E_+) \quad (2.76)$$

En utilisant l'identité

$$\exp(\alpha E_+) E_- \exp(-\alpha E_+) = (E_+ + E_-) e^{\alpha} - E_+ \quad (2.77)$$

le système d'équations auquel doivent satisfaire α et β est

$$\begin{aligned} \partial_+ \beta &= 0 \\ \partial_- \beta &= e^{-\alpha} \partial_- \log \rho \\ \partial_+ \alpha - (e^{\alpha} - 1) \partial_+ \beta &= -\partial_+ \log \rho \\ \partial_- \alpha - (e^{\alpha} - 1) \partial_- \beta &= 0 \end{aligned}$$

La résolution du système est sans difficulté et nous déduisons ainsi la solution suivante

$$\Psi_v = \left(\frac{b(z_-) + c_1}{\rho} \right)^{E_+} \left(\frac{b(z_-) + c_1}{c_2} \right)^{E_-} \quad (2.78)$$

$$= \left(\frac{\rho}{a(z_+) + c_3} \right)^{E_-} \left(\frac{c_4}{a(z_+) + c_3} \right)^{E_+} \quad (2.79)$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes d'intégration. La seconde formulation (2.79) est obtenue de la même manière que (2.78). Pour terminer cette présentation de la solution du vide, nous allons introduire une normalisation commode de la fonction d'onde. Nous imposerons que cette dernière soit égale à l'identité lorsque $a(z_+) = b(z_-) = 1/2$. Nous obtenons de cette manière les formules de Ψ_v normalisées

$$\Psi_v = \left(\frac{b(z_-) + \frac{1}{2}}{\rho} \right)^{E_+} \left(b(z_-) + \frac{1}{2} \right)^{E_-} \quad (2.80)$$

$$= \left(\frac{\rho}{a(z_+) + \frac{1}{2}} \right)^{E_-} \left(a(z_+) + \frac{1}{2} \right)^{-E_+} \quad (2.81)$$

Nous disposons désormais d'une solution particulière de notre système. Nous allons pouvoir employer les techniques décrites dans la section 2.1.

2.5 Transformations d'habillage appliquées à la gravité

Cette section a pour objectif de montrer comment nous pouvons engendrer de nouvelles solutions de la gravité réduite à l'aide des symétries d'habillage. Nous poserons les bases de la problématique liée à la méthode purement algébrique que nous avons développée.

2.5.1 Formules générales

Considérons une solution particulière $A_{0\pm}$ et Ψ_0 du système auxiliaire. Habillons cette solution par un élément g du groupe G_{aft} . Nous avons vu dans ce cas que la connexion se transformait suivant une transformation de jauge (2.10-2.11) (qui ne doit pas être confondue avec celle de notre modèle). De plus la connexion obtenue vérifie la condition de courbure nulle. Mais pour qu'elle puisse correspondre à une solution du problème, il faut aussi que la forme soit identique à la connexion initiale. C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

Pour simplifier la démonstration, nous utiliserons une transformation d'habillage infinitésimale. Soit un élément $X = X_{int} - X_{ext}$ de \mathcal{G}_{aft} avec $X_{int} \in (\mathcal{B}_+ \oplus \mathbb{C}k)$ et $X_{ext} \in (\mathcal{B}_- \oplus \mathbb{C}k)$. En posant

$$Y_{int,ext} = (\Psi_0 X \Psi_0^{-1})_{int,ext}$$

l'action sur la connexion s'écrit

$$A_0^X = A_0 - \partial Y_{int,ext} - [A, Y_{int,ext}] \quad (2.82)$$

A_0^X est-elle de la forme (2.72) ? De par les relations de commutation (2.71), la partie sur Virasoro provient uniquement de la connexion originale. Par conséquent, le terme sur Virasoro (et donc le dilaton) est invariant sous les transformations d'habillage considérées. La partie sur \mathcal{B}_\pm est un peu plus compliquée à analyser. Concentrons-nous sur la composante A_{0+} . La formule (2.82) appliquée avec $Y_{int} \in (\mathcal{B}_+ \oplus \mathbb{C}k)$ nous indique que seul des éléments de degré supérieur ou égal à zéro peuvent être produits. Un raisonnement identique avec $Y_{ext} \in (\mathcal{B}_+ \oplus \mathbb{C}k)$, compte tenu des relations de commutation dans \mathcal{G}_{aft} , nous montre que A_{0+}^X se décompose sur des générateurs de degré inférieur ou égal à un (notons que le commutateur avec E_+ ne produit bien que des termes de degré 1, puisque ce dernier est nul lorsqu'il s'applique sur un élément de degré zéro). Ceci prouve que A_{0+}^X est bien de la même forme que A_{0+} . On montre aisément qu'il en va de même pour A_{0-}^X . Pour terminer, regardons la composante suivant la charge centrale k . Si on considère la transformation avec Y_{int} sur A_{0+} , seuls les premier et second terme de (2.82) peuvent produire un tel élément. Ce dernier sera donc de la forme $\partial_+ \hat{\sigma}^X k$ conformément à (2.72). Un résultat identique est obtenu pour A_{0-} avec Y_{ext} . En fait nous avons une contrainte supplémentaire : pour que les facteurs conformes soient identiques pour A_+ et A_- avec cette association des transformations

$$+ \longleftrightarrow int \quad \text{et} \quad - \longleftrightarrow ext$$

il est nécessaire que la somme des composantes suivant la charge centrale k de Y_{ext} et Y_{int} soit nulle.

Grâce à la précédente démonstration, nous sommes en mesure de déterminer les composantes de la connexion résultant de la transformation. Pour cela, nous décomposons $\Theta_{int,ext}$ de la façon suivante

$$\Theta_{int} = (\Psi_0 g \Psi_0^{-1})_{int} = e^{\eta k/2} h_{int}(0) h_{int}(1) M_{int} \quad (2.83)$$

$$\Theta_{ext} = (\Psi_0 g \Psi_0^{-1})_{ext} = e^{-\eta k/2} h_{ext}(0) h_{ext}(1) M_{ext} \quad (2.84)$$

avec $h_{int,ext}(0) \in SO(2)$, $h_{int}(1) = \exp(X_{int}\lambda)$, $h_{ext}(1) = \exp(X_{ext}\lambda^{-1})$ $X_{int,ext}$ étant des éléments de \mathbf{k} , et $M_{int,ext}$ est un élément du groupe s'écrivant comme l'exponentiel de termes de degré supérieur ou égal à deux (respectivement inférieur ou égal à -2). Insérons les expressions (2.83) et (2.84) dans l'équivalent de la relation (2.10) pour chacune des composantes de

la connexion. En s'appuyant sur le précédent raisonnement, il suffit de conserver uniquement les termes se développant sur les générateurs présents dans la connexion originale, sachant que les autres s'annuleront. Avec la convention d'association décrite précédemment, nous obtenons

$$Q_+ = h_{int}(0)Q_{0+}h_{int}^{-1}(0) - (\partial_+ h_{int}(0)) h_{int}^{-1}(0) \quad (2.85)$$

$$Q_- = h_{ext}(0)Q_{0-}h_{ext}^{-1}(0) - (\partial_- h_{ext}(0)) h_{ext}^{-1}(0) \quad (2.86)$$

$$P_+ = h_{int}(0) \left(P_{0+} + [X_{int}, Q_{0+}] + \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_+\rho) X_{int} - \partial_+ X_{int} \right) h_{int}^{-1}(0) \quad (2.87)$$

$$P_- = h_{ext}(0) \left(P_{0-} + [X_{ext}, Q_{0-}] + \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_-\rho) X_{ext} - \partial_- X_{ext} \right) h_{ext}^{-1}(0) \quad (2.88)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \eta \quad (2.89)$$

$$\rho = \rho_0 \quad (2.90)$$

La convention opposée nous permet d'obtenir des formules simplifiées pour les composantes P_{\pm}

$$P_+ = h_{ext}(0) \left(P_{0+} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_+\rho) X_{ext} \right) h_{ext}^{-1}(0) \quad (2.91)$$

$$P_- = h_{int}(0) \left(P_{0-} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_-\rho) X_{int} \right) h_{int}^{-1}(0) \quad (2.92)$$

$$(2.93)$$

Quelques remarques sur ces résultats. Nous constatons que les transformations d'habillage agissent comme des transformations de jauge. En particulier dans la décomposition (2.83-2.84), seul $h(0) = h_{ext}^{-1}(0)h_{int}(0)$ est fixée. Nous pouvons donc toujours choisir cette décomposition pour imposer un choix de jauge particulier.

Soulignons que ces calculs sont indépendant du groupe sur lequel repose le modèle sigma. Ils resteraient donc valides dans le cas des supergravités mentionné au paragraphe 2.3.2.

Les expressions (2.85-2.92) se simplifient grandement si nous prenons pour solution de départ la solution du vide. Les formules correspondantes s'écrivent alors

$$P_+ = \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_+\rho) h_{ext}(0) X_{ext} h_{ext}^{-1}(0) \quad (2.94)$$

$$P_- = \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_-\rho) h_{int}(0) X_{int} h_{int}^{-1}(0) \quad (2.95)$$

$$Q_+ = -(\partial_+ h_{int}(0)) h_{int}^{-1}(0) \quad (2.96)$$

$$Q_- = -(\partial_- h_{ext}(0)) h_{ext}^{-1}(0) \quad (2.97)$$

$$\hat{\sigma} = \eta \quad (2.98)$$

$$\rho = \rho_0 \quad (2.99)$$

Nous n'irons pas plus loin dans ce chapitre sur la détermination de la métrique par les transformations d'habillage. Nous verrons dans le prochain chapitre comment aller au-delà et obtenir directement les expressions des éléments de la métrique.

2.5.2 Engendrer l'ensemble des solutions

La question que nous devons nous poser à ce stade est de savoir si à partir d'une solution donnée (en particulier celle du vide), les transformations d'habillage nous permettent

d'atteindre n'importe quelle autre solution. Une manière plus élégante de reformuler cette interrogation est de savoir si l'espace des solutions ne contient qu'une seule orbite d'habillage. Dans ce qui suit, nous prendrons comme solution de départ la solution du vide et considérerons le choix de jauge

$$Q_- = 0 \quad \text{et} \quad Q_+ = h_{(0)} \partial_+ h_{(0)}^{-1} \quad (2.100)$$

Dans un premier temps, montrons que toute fonction d'onde Ψ peut se décomposer de la façon suivante

$$\Psi = e^{-\eta k/2} \Psi_- \Psi_v \quad \text{où} \quad \Psi_- \in \exp \mathcal{B}_- \quad (2.101)$$

Considérons $\hat{\Psi} = \exp(\eta k/2) \Psi \Psi_v^{-1}$ et, en utilisant l'identité (2.4), déduisons les équations auxquelles obéit cette quantité

$$\left(\partial_+ \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi}^{-1} + \rho^{-1} \partial_+ \rho \left[E_+, \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}^{-1} + P_+ \lambda + h_{(0)} \partial_+ h_{(0)}^{-1} - \partial_+ (\eta + \hat{\sigma}) \frac{k}{2} = 0 \quad (2.102)$$

$$\left(\partial_- \hat{\Psi} \right) \hat{\Psi}^{-1} - \rho^{-1} \partial_- \rho \left[E_-, \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}^{-1} + P_- \lambda^{-1} + \partial_- (\eta - \hat{\sigma}) \frac{k}{2} = 0 \quad (2.103)$$

A priori d'après la première équation (2.102), un déplacement suivant la direction z_+ peut produire un terme qui ne soit pas purement sur $\exp(\mathcal{B}_-)$. En fait, si nous choisissons $\hat{\Psi}$ comme élément de $\exp(\mathcal{B}_-)$, dans ce cas les termes sur les degrés strictement positifs dans (2.102) se compensent, prouvant que ce choix conduit à une solution valide. En effet, posons

$$\hat{\Psi} = h_{(-1)} M \quad \text{avec} \quad h_{(-1)} = \exp(V_{(-1)} \lambda^{-1}) \quad (2.104)$$

où M s'écrit comme l'exponentielle de terme de degré inférieur à -2. Avec cette hypothèse et en utilisant l'identité

$$\left[E_+, \exp(A \lambda^{-1}) \right] \exp(-A \lambda^{-1}) = -\frac{1}{2} A (\lambda - \lambda^{-1}) + \frac{1}{8} k \text{tr}(A^2) \quad (2.105)$$

la décomposition de (2.102-2.103) sur chacun des éléments de l'algèbre nous donne

$$\rho^{-1} \partial_+ \rho V_{(-1)} = 2P_+$$

pour les termes de degré un. Ainsi en prenant $V_{(-1)}$ tel que cette équation soit vérifiée, les termes de degré un se compensent dans (2.102). Regardons maintenant les termes sur la charge centrale

$$\partial_- \eta = \partial_- \hat{\sigma} \quad \text{et} \quad \partial_+ \eta = -\partial_+ \hat{\sigma} + \frac{1}{4} \rho^{-1} (\partial_+ \rho) \text{tr}(V_{(-1)}^2)$$

Ceci prouve bien que $\eta = \hat{\sigma}$. Regardons maintenant les équations pour M

$$\begin{aligned} (\partial_+ M) M^{-1} + \rho^{-1} \partial_+ \rho [E_+, M] M^{-1} + h_{(-1)}^{-1} h_{(0)} \partial_+ \left(h_{(0)}^{-1} h_{(-1)} \right) + P_+ \lambda^{-1} &= 0 \\ (\partial_- M) M^{-1} - \rho^{-1} \partial_- \rho [E_-, M] M^{-1} &= 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue à partir des équations du mouvement (2.58) et (2.60) et de la valeur retenue pour $V_{(-1)}$ qui permettent d'écrire

$$\partial_- V_{(-1)} = -P_- + \frac{1}{2} \rho^{-1} (\partial_- \rho) V_{(-1)}$$

Les équations sur M sont dans la sous-algèbre de Borel \mathcal{B}_- et permettent de déterminer M degré par degré. Supposons notre condition est telle que $\hat{\Psi}$ soit sur un élément de $\exp(\mathcal{B}_-)$. Par exemple, nous pouvons prendre la fonction d'onde égale à l'identité en un point de l'espace-temps donné, ce qui est toujours possible et correspond à un choix de normalisation de la fonction. Ces équations nous assurent alors que la fonction d'onde restera à valeur dans cet ensemble pour tout autre point de l'espace de définition. Un raisonnement similaire peut-être mené pour la décomposition

$$\Psi = e^{\eta k/2} h_{(0)} \Psi_+ \Psi_v \quad \text{où} \quad \Psi_+ \in \exp \mathcal{B}_+ \quad (2.106)$$

Pour terminer notre démonstration, il suffit de prouver que la tranformation d'habillage qui permet de passer de la solution du vide à Ψ . Dans un premier temps, remarquons que l'égalité (2.4) ne définit la fonction d'onde qu'à une multiplication à droite par un élément constant de G_{aft} près. Ainsi les décompositions (2.106) et (2.101) vérifient la relation

$$e^{\eta k/2} \Psi_- \Psi_v g = e^{-\eta k/2} h_{(0)} \Psi_- \Psi_v$$

où g est un élément constant de G_{aft} . Sachant que $\Psi_{\pm} \in \exp(\mathcal{B}_{\pm})$, cette identité nous permet de résoudre le problème de Riemann-Hilbert pour $\Psi_v g \Psi_v^{-1}$

$$(\Psi_v g \Psi_v^{-1})_{\pm} = e^{\pm \eta k/2} h_{(0)\pm} \Psi_{\pm}$$

avec $h(0)_{(0)+} = h_{(0)}$ et $h_{(0)-} = I$. Réécrivons la fonction d'onde (en utilisant le fait qu'elle soit définie à une multiplication près)

$$\Psi = e^{\eta k/2} \Psi_- \Psi_v g_-^{-1} = e^{-\eta k/2} h_{(0)} \Psi_- \Psi_v g_+^{-1}$$

en ayant posé la décomposition $g = g_-^{-1} g_+$. En utilisant le fait démontré précédemment que $\eta = \hat{\sigma}$, et cette écriture de la fonction d'onde, ceci prouve que Ψ est dans l'orbite d'habillage de la solution du vide.

2.5.3 Groupe de Geroch et transformations d'habillage

Lors de la présentation du groupe de Geroch au chapitre 1, nous avons donné l'esquisse d'une méthode nous permettant d'engendrer de nouvelles solutions grâce à l'action des éléments de ce groupe. D'autre part, ce chapitre a mis l'accent sur la méthode du groupe d'habillage pour obtenir n'importe quelle solution à partir d'une solution initiale. Nous allons décrire dans cette section le lien qui existe entre ces deux visions de la résolution de problème.

Regardons l'action des générateurs du groupe de Matzner-Misner et du groupe de Ehlers sur la connexion de Lax et tout d'abord sur chacune des composantes de cette dernière. Pour l'action des générateurs du groupe de Matzner-Misner, nous obtenons

$$J_z Q_{\pm} = 0, \quad J_- Q_{\pm} = 0, \quad J_+ Q_{\pm} = \frac{1}{2} \Delta^{-2} \partial_{\pm} \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.107)$$

$$J_z P_{\pm} = 0, \quad J_- P_{\pm} = 0, \quad J_+ P_{\pm} = (\partial_{\pm} N) \sigma^z - \frac{1}{2} \Delta^{-2} \partial_{\pm} \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (2.108)$$

$$J_z \partial_{\pm} \hat{\sigma} = 0, \quad J_- \partial_{\pm} \hat{\sigma} = 0, \quad J_+ \partial_{\pm} \hat{\sigma} = 0 \quad (2.109)$$

$$J_z \rho = 0, \quad J_- \rho = 0, \quad J_+ \rho = 0 \quad (2.110)$$

Pour les générateurs du groupe de Ehlers, nous avons les résultats suivants

$$J_z^* Q_\pm = 0, \quad J_-^* Q_\pm = 0, \quad J_+^* Q_\pm = \mp \frac{1}{2} \partial_\pm (\rho \Delta) (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.111)$$

$$J_z^* P_\pm = 0, \quad J_-^* P_\pm = 0, \quad J_+^* P_\pm = \mp \rho \Delta^{-2} (\partial_\pm N) \sigma^z \pm \frac{1}{2} \partial_\pm (\rho \Delta) (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (2.112)$$

$$J_z^* \partial_\pm \hat{\sigma} = 0, \quad J_-^* \partial_\pm \hat{\sigma} = 0, \quad J_+^* \partial_\pm \hat{\sigma} = \pm \rho \Delta^2 \partial_\pm N \quad (2.113)$$

$$J_z^* \rho = 0, \quad J_-^* \rho = 0, \quad J_+^* \rho = 0 \quad (2.114)$$

Ainsi seul J_+ et J_+^* ont une action non-nulle. L'action sur la paire de Lax proprement dite s'écrit

$$J_+ A_\pm = (\partial_\pm N) \sigma^z \lambda^{\pm 1} - \Delta^{-2} \partial_\pm \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \lambda^{\pm 1} + \Delta^{-2} \partial_\pm \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.115)$$

$$J_+^* A_\pm = -\rho \Delta^2 \partial_\pm N \frac{k}{2} \pm \partial_\pm (\rho \Delta) (\sigma^+ + \sigma^-) \lambda^{\pm 1} \mp \Delta^2 (\partial_\pm N) \sigma^z \lambda^{\pm 1} \mp \partial_\pm (\rho \Delta) (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.116)$$

Nous allons maintenant montrer que ces transformations peuvent être représentées comme des transformations infinitésimales d'habillage. C'est à dire que nous allons chercher un élément Y_{int} (respectivement Y_{ext}) de $(\mathcal{B}_+ \oplus \mathbb{C}k)$ (respectivement $(\mathcal{B}_- \oplus \mathbb{C}k)$) vérifiant la relation déduite de (2.82)

$$J_+ A = -\partial Y_{int,ext} - [A, Y_{int,ext}]$$

$$J_+^* A = -\partial Y_{int,ext}^* - [A, Y_{int,ext}^*]$$

Une esquisse de la méthode de résolution de ces équations est proposée dans l'annexe B. Au final nous obtenons les solutions suivantes

$$Y_{int,ext}^* = \pm N^* \frac{k}{2} \pm \rho \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) \frac{1 + \lambda^{\pm 2}}{1 - \lambda^{\pm 2}} \mp \rho \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \frac{2\lambda^{\pm 1}}{1 - \lambda^{\pm 2}} \quad (2.117)$$

$$Y_{int,ext} = \Delta^{-1} (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (2.118)$$

$$(2.119)$$

Notons que pour J_+ , il s'agit d'une pure transformation de jauge. Les fractions en λ doivent être comprises comme des séries sur chacune des sous-algèbre de Borel. Par exemple

$$-(\sigma^+ + \sigma^-) \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} = -2(\sigma^+ + \sigma^-) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{2n+1}$$

$$(\sigma^+ + \sigma^-) \frac{2\lambda^{-1}}{1 - \lambda^{-2}} = 2(\sigma^+ + \sigma^-) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(2n+1)}$$

Cette remarque est importante en particulier lorsque nous sommes amenés à considérer la quantité $Y^* = Y_{int}^* - Y_{ext}^*$ puisqu'un calcul naïf avec les fractions nous donnerait un résultat nul. Pour terminer cette démonstration, il faut montrer que Y_{int}^* et Y_{ext}^* peuvent s'écrire

comme solution de la décomposition de $\Psi X^* \Psi^{-1}$ où X^* est un élément constant de l'algèbre \mathcal{G}_{aft} . Il suffit de remarquer que Y^* est solution de

$$\partial_{\pm} Y^* + [A_{\pm}, Y^*] = 0$$

Il existe donc un élément constant X^* de l'algèbre \mathcal{G}_{aft} tel que $Y^* = \Psi X^* \Psi^{-1}$. Comme $Y_{int,ext}^* \in (\mathcal{B}_{\pm} \oplus \mathbb{C}k)$, nous en déduisons que $Y_{int,ext}^* = (\Psi X^* \Psi^{-1})_{int,ext}$. Pour Y , le calcul est trivial.

Pour être complet, nous devrions aussi étudier l'impact du groupe de Geroch sur la fonction d'onde. Pour autant, la description précédente est suffisante pour comprendre que toute élément du groupe de Geroch peut être associé à une transformation d'habillage. L'action du groupe de Geroch sur la fonction étant plus compliquée à décrire que dans le cas de la connexion de Lax, nous invitons le lecteur intéressé à consulter [16] pour plus de détails.

Chapitre 3

Méthode algébrique de résolution

Sommaire

3.1	Fontions τ	39
3.1.1	Fonctions τ et connexion	39
3.1.2	Fonctions τ et variables duales	41
3.2	Dualité et jauge triangulaire	42
3.2.1	Nouvelle paramétrisation des équations de Ernst	42
3.2.2	Solutions duales dans la jauge triangulaire	43
3.3	Opérateurs de vertex et représentations	45
3.3.1	généralités et représentations du groupe d'habillage	45
3.3.2	Evaluation des fonctions τ	47
3.4	Formulation algébrique des éléments de la métrique	48
3.4.1	Opérateurs de vertex et dualité	48
3.4.2	Opérateurs de vertex et jauge triangulaire	49
3.4.3	Formule des déterminants	50
3.5	Application à quelques exemples	51
3.5.1	Solutions diagonales	51
3.5.2	Solutions non-diagonales	53
3.6	Lien avec la méthode de Belinski et Zakharov	54
3.7	Conclusions	55

3.1 Fontions τ

Les fonctions τ sont un outil standard dans le cadre des systèmes intégrables. Elles permettent en particulier de les réexprimer sous forme d'un système d'équations différentielles utilisant ces fonctions τ appelé système d'équations d'Hirota (cf. [30] pour une introduction sur ce sujet). L'avantage de cette approche est de pouvoir exprimer simplement les champs intervenant dans le problème. Nous ne ferons pas de présentation générale sur la définition et l'utilisation des ces fonctions, préférant une approche concrète appliquée au cas de la gravité.

3.1.1 Fonctions τ et connexion

L'algèbre affine \mathcal{G}_{aft} possède deux vecteurs fondamentaux de plus haut poids $|\Lambda_{\pm}\rangle$ qui sont définis par les relations

$$(\sigma^+ - \sigma^-) |\Lambda_{\pm}\rangle = \pm \frac{i}{2} |\Lambda_{\pm}\rangle \quad (3.1)$$

$$k|\Lambda_{\pm}\rangle = |\Lambda_{\pm}\rangle \quad (3.2)$$

$$(\sigma^+ - \sigma^-) \lambda^n |\Lambda_{\pm}\rangle = (\sigma^+ + \sigma^-) \lambda^n |\Lambda_{\pm}\rangle = \sigma^z \lambda^n |\Lambda_{\pm}\rangle = 0 \quad \text{pour } n > 0 \quad (3.3)$$

L'action de ces vecteurs sur l'algèbre de Virasoro est définie par

$$L_n |\Lambda_{\pm}\rangle = 0 \quad \text{pour } n > 0 \quad (3.4)$$

$$L_0 |\Lambda_{\pm}\rangle = h_{\Lambda_{\pm}} |\Lambda_{\pm}\rangle \quad (3.5)$$

où $h_{\Lambda_{\pm}}$ est le poids conforme de la représentation. Les vecteurs duals $\langle \Lambda_{\pm} |$ satisfont aux identités suivantes

$$\langle \Lambda_{\pm} | (\sigma^+ - \sigma^-) \lambda^n = \langle \Lambda_{\pm} | (\sigma^+ + \sigma^-) \lambda^n = \langle \Lambda_{\pm} | \sigma^z \lambda^n = 0 \quad \text{pour } n < 0 \quad (3.6)$$

$$\langle \Lambda_{\pm} | L_n = 0 \quad \text{pour } n > 0 \quad (3.7)$$

Ces vecteurs de plus haut poids peuvent nous aider à déterminer les grandeurs intervenant dans la paire de Lax. Commençons par considérer les fonctions

$$\tau_0^{\pm} = \langle \Lambda_{\pm} | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle \quad (3.8)$$

Pour évaluer τ_0^{\pm} , il nous suffit d'utiliser l'expression (2.83-2.84) de la factorisation de $\Psi_0 g \Psi_0^{-1}$

$$(\Psi_0 g \Psi_0^{-1})_{int,ext} = e^{\pm \eta k/2} h_{int,ext}(0) \exp(X_{int,ext} \lambda^{\pm 1}) M_{int,ext} \quad (3.9)$$

En appliquant les vecteurs de plus haut poids, seuls les termes $\exp(\pm \eta k/2)$ et $h_{int,ext}(0)$ donneront une contribution non égale à l'identité. Dans la suite de cet exposé et dans le but d'alléger nos notations, nous remplacerons les indices *int* et *ext* par + et -, et clarifierons la situation en cas de doute avec les autres indices \pm issus des vecteurs de plus haut poids ou des coordonnées du cône de lumière. En paramétrisant la partie sur $SO(2)$ par

$$h_{\pm}(0) = \exp(-\frac{1}{2} \phi_{\mp} (\sigma^+ - \sigma^-)) \quad (3.10)$$

nous obtenons une expression simple de la fonction τ_0^{\pm}

$$\tau_0^{\pm} = \exp(\eta \pm \frac{i}{4} \phi) \quad (3.11)$$

Avec $\phi = \phi_+ - \phi_-$. Cette relation nous permet d'exprimer le facteur conforme $\hat{\sigma} = \eta = \log(\tau_+ \tau_-)$. Pour déterminer Q_{\pm} , nous ne disposons pour l'instant que de ϕ , ce qui constitue une information partielle. Nous verrons par la suite comment compléter cette donnée en résolvant le problème de la factorisation. Considérons maintenant les quantités

$$\tau_{(+1)}^{\pm} = \langle \Lambda_{\pm} | (\Psi_0 g \Psi_0^{-1}) \sigma^z \lambda^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle \quad (3.12)$$

$$\tau_{(-1)}^{\pm} = \langle \Lambda_{\pm} | \sigma^z \lambda (\Psi_0 g \Psi_0^{-1}) | \Lambda_{\pm} \rangle \quad (3.13)$$

Comme nous l'avons fait pour τ_0^{\pm} , il est possible de simplifier ces fonctions grâce à la décomposition de $\Psi_0 g \Psi_0^{-1}$

$$\begin{aligned} \tau_{(+1)}^{\pm} &= \tau_0^{\pm} \langle \Lambda_{\pm} | \exp(X_+ \lambda) M_+ \sigma^z \lambda^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle \\ \tau_{(-1)}^{\pm} &= \langle \Lambda_{\pm} | \sigma^z \lambda M_-^{-1} \exp(-X_- \lambda^{-1}) | \Lambda_{\pm} \rangle \tau_0^{\pm} \end{aligned}$$

où X_{\pm} est la quantité introduite dans la décomposition (3.9). Nous pouvons évaluer ces expressions grâce au raisonnement suivant. M_+ s'écrivant comme l'exponentielle de termes de degré supérieur ou égal à deux, nous en déduisons que

$$M_+ \sigma^z \lambda^{-1} M_+^{-1} = \sigma^z \lambda^{-1} + \text{termes de degré} \geq 1$$

Compte tenu du fait que $M_+ |\Lambda_{\pm}\rangle = |\Lambda_{\pm}\rangle$, ceci nous permet d'éliminer formellement M_+ de l'expression de $\tau_{(+1)}^{\pm}$. De la même manière, la conjugaison de l'élément $\sigma^z \lambda^{-1}$ va pouvoir se mettre sous la forme

$$e^{X_+ \lambda} \sigma^z \lambda^{-1} e^{-X_+ \lambda} = \sigma^z \lambda^{-1} + [X_+, \sigma^z] + \frac{k}{2} \text{tr}(X_+ \sigma^z) + \text{termes de degré} \geq 1 \quad (3.14)$$

En introduisant la notation $X_{\pm} = X_{\pm}^z \sigma_z + X_{\pm}^x (\sigma_+ + \sigma_-)$, nous obtenons finalement une expression très simple

$$\tau_{(+1)}^{\pm} = (X_+^z \mp i X_+^x) \tau_0^{\pm} \quad (3.15)$$

Avec une démarche similaire, nous déduisons la formule équivalente pour $\tau_{(-1)}^{\pm}$

$$\tau_{(-1)}^{\pm} = - (X_-^z \pm i X_-^x) \tau_0^{\pm} \quad (3.16)$$

Si nous réexprimons les expressions (2.94-2.98) des composantes de la connexion de Lax à l'aide des grandeurs introduites dans ce paragraphe

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{1}{2} \rho^{-1} (\partial_{\pm} \rho) (X_{\mp}^z \cos \phi - X^x \sin \phi) \sigma^z \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho^{-1} (\partial_{\pm} \rho) (X_{\mp}^z \cos \phi - X^x \sin \phi) (\sigma^+ + \sigma^-) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2} (\partial_{\pm} \phi_{\pm}) \quad (3.18)$$

$$\hat{\sigma} = \eta \quad (3.19)$$

nous constatons qu'il est possible, modulo une transformation de jauge, de remonter à ces quantités par le biais de l'évaluation des fonctions τ . Pour autant, nous n'avons pas encore obtenu de formule purement algébrique pour les éléments de la métrique (rappelons que P et Q s'expriment à l'aide des dérivées de ces éléments). Nous allons voir dans le prochain paragraphe que des techniques similaires vont nous permettre d'aboutir enfin au résultat depuis longtemps énoncé.

3.1.2 Fonctions τ et variables duales

Nous avons vu dans la section 2.5.3 du chapitre précédent qu'une transformation de Ehler pouvait être associée à une transformation d'habillage. En posant

$$\mathcal{E}_{\pm} = \mp \frac{k}{2} \pm \rho \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) \frac{1 + \lambda^{\pm 2}}{1 - \lambda^{\pm 2}} \mp \rho \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \frac{2\lambda^{\pm 1}}{1 - \lambda^{\pm 2}} \quad (3.20)$$

la transformation infinitésimale d'habillage associée se met alors sous la forme très simple

$$Y^* = \pm N^* \frac{k}{2} + \Delta^{*-1} \mathcal{E}_{\pm} \quad (3.21)$$

La différence Y^* de ces deux expressions est solution de l'équation $\partial_{\pm} Y^* + [A_{\pm}, Y^*] = 0$ et peut donc se mettre sous la forme $\Psi X^* \Psi^{-1}$. Nous sommes libres de fixer la normalisation de la fonction telle qu'en un point x_0 nous ayons $\Psi(x_0) = I$ (par exemple celle introduite pour la fonction d'onde du vide (2.80)). Cette hypothèse nous permet ainsi d'obtenir l'expression

$$Y^* = N^* k + \Delta^{*-1} \mathcal{E} = \Psi \mathcal{E} \Psi^{-1} \quad (3.22)$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_-$.

Insistons sur le fait que ces calculs ont été menés dans la jauge triangulaire, puisque nous avons utilisé cette dernière pour obtenir (3.21). Ceci impose que nous sachions comment effectuer les décompositions pour que les parties sur $SO(2)$ soient en accord avec ce choix de jauge.

Si nous pouvons considérer la valeur moyenne de (3.22) sur les vecteurs de plus haut poids, nous obtenons l'identité

$$N^* \pm i \Delta^{*-1} = \langle \Lambda_{\pm} | \Psi \mathcal{E} \Psi^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle \quad (3.23)$$

en ayant utilisé l'égalité $\langle \Lambda_{\pm} | \mathcal{E} | \Lambda_{\pm} \rangle = 1$. Si nous supposons que nous savons effectuer la factorisation préservant la jauge triangulaire, alors en écrivant $\Psi_{\pm} = \Theta_{\pm} \Psi_v g_{\pm}^{-1}$, nous en déduisons la formule centrale de ce chapitre

$$N^* \pm i \Delta^{*-1} = \frac{\langle \Lambda_{\pm} | \Psi_v (g_{\pm}^{-1} \mathcal{E} g_{\pm}) \Psi_v^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle}{\langle \Lambda_{\pm} | \Psi_v (g_{\pm}^{-1} g_{\pm}) \Psi_v^{-1} | \Lambda_{\pm} \rangle} \quad (3.24)$$

Cette identité est obtenue en substituant la factorisation de Ψ dans (3.23). Par application des vecteurs, seuls subsistent les termes de degré zéro de Θ_{\pm} qui vont pouvoir être extraits de la moyenne. Le dénominateur nous permet d'exprimer ce nouveau facteur sous forme d'une moyenne où Θ_{\pm} n'apparaît plus.

Nous sommes arrivés au final à une expression du potentiel de Ehler $N^* \pm i \Delta^{*-1}$ de la métrique duale totalement exprimée à l'aide d'une formule algébrique. Si nous utilisons en plus la formule (3.11) et la relation de dualité (1.18), nous obtenons une formule purement algébrique pour le facteur conforme

$$e^{4\hat{\sigma}^*} = \rho^{-1} \Delta^{*-2} \langle \Lambda_+ | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \Lambda_+ \rangle \langle \Lambda_- | \Psi_0 g \Psi_0^{-1} | \Lambda_- \rangle \quad (3.25)$$

ce qui nous donne une formulation totalement algébrique de la métrique duale.

L'apparente simplicité de ces expressions ne doit pas faire oublier deux points importants. Premièrement, nous ne savons toujours pas comment effectuer la factorisation en préservant la jauge triangulaire (ce qui est rappelons-le, l'hypothèse de base de ces formules). Deuxièmement, nous n'avons pour l'instant aucune méthode pratique pour calculer les fonctions τ . Le reste du chapitre sera consacré à la résolution de ces problèmes.

3.2 Dualité et jauge triangulaire

3.2.1 Nouvelle paramétrisation des équations de Ernst

Avant de nous attaquer au problème de la factorisation, nous allons introduire une paramétrisation plus commode des équations (2.57-2.61). Nous avons vu que les formules des éléments de la connexion Lax issues des fonctions τ faisaient intervenir les quantités $X_{(\pm 1)}$ et ϕ_{\pm} . Notre but dans ce paragraphe sera d'obtenir des équations pour ces grandeurs.

Pour simplifier les expressions nous introduirons la quantité complexe

$$Z_{\pm} = \left(X_{(\pm 1)}^z + i X_{(\pm 1)}^x \right) \quad (3.26)$$

Les composantes P_{\pm} de la connexion peuvent alors se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{1}{4} \rho^{-1} (\partial_{\pm} \rho) \left(Z_{\mp} e^{i\phi_{\mp}} \right) (\sigma^z - i(\sigma^+ + \sigma^-)) \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho^{-1} (\partial_{\pm} \rho) \left(\bar{Z}_{\mp} e^{-i\phi_{\mp}} \right) (\sigma^z + i(\sigma^+ + \sigma^-)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

La substitution des expressions des composantes de la paire de Lax dans (2.57-2.61) nous permet de déduire les équations du mouvement associées aux nouvelles quantités introduites

$$\partial_{\pm} Z_{\pm} = \frac{1}{2} \rho^{-1} (\partial_{\pm} \rho) \left(Z_{\pm} - Z_{\mp} e^{-i(\phi_+ - \phi_-)} \right) \quad (3.28)$$

$$\partial_+ \partial_- (\phi_+ - \phi_-) = -\frac{i}{2} \rho^{-2} (\partial_+ \rho) (\partial_- \rho) \left(Z_+ \bar{Z}_- e^{i(\phi_+ - \phi_-)} - Z_- \bar{Z}_+ e^{-i(\phi_+ - \phi_-)} \right) \quad (3.29)$$

$$\partial_{\pm} \hat{\sigma} = \frac{1}{4} \rho (\partial_{\pm} \rho) Z_{\mp} \bar{Z}_{\mp} \quad (3.30)$$

Ce système peut s'exprimer à l'aide des fonctions τ . Pour alléger les notations nous poserons

$$\tau_0 \equiv \tau_0^+ = \bar{\tau}_0^- \quad \text{et} \quad \tau_{(\pm 1)} \equiv \tau_{(\pm 1)}^+ = \bar{\tau}_{(\pm 1)}^-$$

En réexprimant les nouvelles quantités à l'aide de ces fonctions

$$\begin{aligned} e^{2\hat{\sigma}} &= \tau_0 \bar{\tau}_0, & e^{i\phi} &= \frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0} \\ Z_+ &= \frac{\bar{\tau}_{+1}}{\bar{\tau}_0}, & Z_- &= \frac{\tau_{-1}}{\tau_0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

nous en déduisons les équations du mouvement pour les fonctions τ

$$\tau_0 \partial_+ \tau_{(\pm 1)} - \tau_{(\pm 1)} \partial_+ \tau_0 = \frac{1}{2} (\rho^{-1} \partial_{\pm} \rho) (\tau_0 \tau_{(\pm 1)} - \bar{\tau}_{(\mp 1)} \bar{\tau}_0) \quad (3.32)$$

$$\tau_0 \partial_+ \partial_- \tau_0 - (\partial_+ \tau_0) (\partial_- \tau_0) = -\frac{1}{4} (\rho^{-1} \partial_+ \rho) (\rho^{-1} \partial_- \rho) \tau_{(+1)} \tau_{(-1)} \quad (3.33)$$

Notons que la dernière équation est obtenue à partir de (3.29) et de l'équation du second ordre issue de (3.30), rapprochant ce système de celui du modèle sigma non-linéaire déduit du Lagrangien (2.62). Ce système constitue la formulation d'Hirota des équations de Ernst.

3.2.2 Solutions duales dans la jauge triangulaire

Ce paragraphe a pour objectif d'explicitier une relation entre deux solutions duales exprimées dans les variables introduites précédemment. Soit une solution définie par Z_{\pm} et ϕ_{\pm} dans la jauge triangulaire. Considérons les quantités duales Z_{\pm}^* et ϕ_{\pm}^* vérifiant les relations suivantes

$$\phi_{\pm} = \frac{1}{2} (\phi \pm \phi^*) = \pm \phi_{\pm}^* \quad (3.34)$$

$$Z_+^* + Z_+ = -e^{-i\phi_+} \quad (3.35)$$

$$Z_-^* + \bar{Z}_- = -e^{-i\phi_-} \quad (3.36)$$

Nous allons démontrer que ces quantités duales sont solutions des équations (3.28) et (3.29). Commençons par réexprimer la condition de jauge triangulaire pour les variables Z_{\pm} et ϕ_{\pm} . Rappelons qu'une des formulations de cette condition est obtenue celle à partir des composantes de la connexion imposant que $P_{\pm} + Q_{\pm}$ n'ait pas de composante suivant σ^+ . Ainsi, compte-tenu de (3.18) et (3.27), nous obtenons l'équation

$$\partial_{\pm}\phi_{\pm} = -\frac{i}{2}\rho^{-1}(\partial_{\pm}\rho)\left(\bar{Z}_{\mp}e^{-i\phi_{\pm}} - Z_{\mp}e^{i\phi_{\pm}}\right) \quad (3.37)$$

Par substitution, nous montrons directement que les quantités duales vérifient la même relation. Dérivons par rapport à z_+ l'équation (3.35)

$$\partial_+Z_+^* = -\partial_+Z_+ - ie^{i\phi_+^*}\partial_+\phi_+^*$$

En exprimant ∂_+Z_+ à l'aide des équations du mouvement et des variables duales, nous en déduisons que

$$\partial_+Z_+^* = \frac{1}{2}\rho^{-1}(\partial_+\rho)\left(Z_+^* - Z_-^*e^{-i(\phi_+^*-\phi_-^*)}\right)$$

Un calcul identique peut être mené pour $\partial_-Z_-^*$. Pour ϕ^* , il nous suffit de dériver la condition de jauge triangulaire pour évaluer $\partial_+\partial_-(\phi_+^* - \phi_-^*)$ et nous obtenons alors l'équation (3.29). Le facteur conforme est quant à lui déduit de (3.30).

Pour l'instant, nous nous sommes contentés de donner une relation de dualité sans faire le lien avec celle de Kramer-Neuegebauer. Nous allons prouver qu'il s'agit en fait de la même relation. Les dérivées des relations de dualité (1.18) pour Δ , $\hat{\sigma}$ et N peuvent être reformulées de la manière suivante

$$\begin{aligned} \left(Z_{\mp}^*e^{i\phi_{\mp}^*} + \bar{Z}_{\mp}^*e^{-i\phi_{\mp}^*}\right) &= -\left(2 + Z_{\mp}e^{i\phi_{\mp}} + \bar{Z}_{\mp}e^{-i\phi_{\mp}}\right) \\ \partial_{\pm}\hat{\sigma}^* &= \partial_{\pm}\hat{\sigma} + \frac{1}{4}\rho^{-1}(\partial_{\pm}\rho)\left(1 + Z_{\mp}e^{i\phi_{\mp}} + \bar{Z}_{\mp}e^{-i\phi_{\mp}}\right) \\ \partial_{\pm}\phi_{\pm} &= \pm\partial_{\pm}\phi_{\pm}^* \end{aligned}$$

Un calcul direct nous permet de voir que les quantités duales définies par (3.34-3.36) satisfont bien ces relations, prouvant par conséquent qu'elles sont bien équivalente à celles issues de la dualité de Kramer-Neuegebauer. Notons que cette affirmation est justifiée par le fait que dans la paramétrisation de Ernst, les champs sont définis à un certain nombre de transformations près. Donc même si nous avons considéré les dérivées des relations, ces invariances nous assurent que nous considérons bien la même physique.

Il est possible de tirer un corollaire de la propriété de dualité que nous venons de décrire. Supposons que nous ayons deux solutions vérifiant les relations (3.35) et (3.36). Alors en choisissant la factorisation définie par (3.34), nos solutions sont dans la jauge triangulaire et vérifient la relation de dualité. Grâce à cette propriété, nous disposons maintenant d'un critère simple pour résoudre le problème de la factorisation.

Terminons par une remarque sur les relations de dualités (3.35) et (3.36). Nous pouvons les réexprimer sous forme d'un système similaire aux équations d'Hirota, faisant intervenir les fonctions τ

$$\begin{aligned} \tau_0\tau_{(+1)}^* + \tau_0^*\tau_{(+1)} &= -\overline{\tau_0\tau_0^*} \\ \tau_0\tau_{(-1)}^* + \tau_0^*\tau_{(-1)} &= \overline{\tau_0\tau_0^*} \end{aligned} \quad (3.38)$$

où τ_0^* et $\tau_{\pm 1}^*$ désignent les fonctions τ associées à la métrique duale.

3.3 Opérateurs de vertex et représentations

3.3.1 généralités et représentations du groupe d'habillage

Bien que relativement agréables, les expressions obtenues précédemment des éléments de la métrique par les fonctions τ restent inutilisables dans la pratique. Pour aller plus loin, nous avons besoin d'une représentation des éléments du groupe d'habillage. Nous allons voir que les opérateurs de vertex vont nous permettre d'accéder à cette dernière.

Dans un premier temps, nous considérons la représentation de niveau un de l'algèbre à partir d'un champ bosonique libre comme proposée dans [34]. Soit $Z(\mu)$ le champ bosonique défini par

$$Z(\mu) = -i \sum_n p_{-(2n+1)} \frac{\mu^{2n+1}}{2n+1} \quad (3.39)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation p_n obéissent à la loi de commutation

$$[p_n, p_m] = n \delta_{n+m, 0} \quad (3.40)$$

Ils vont engendrer un espace de Fock dont le vide sera noté $|0\rangle$. Par convention, nous prendrons pour action des p_n sur le vide $p_n|0\rangle = 0$ pour $n > 0$. Grâce au champ bosonique $Z(\mu)$, nous pouvons construire les opérateurs de vertex de charge complexe u $W_u(\mu)$

$$W_u(\mu) = : \exp(-iuZ(\mu)) : \quad (3.41)$$

où le symbole $::$ désigne l'ordre normal usuel. Les représentations de niveau un associées respectivement au plus haut poids Λ_+ et Λ_- sont définies par

$$\begin{aligned} i\mu \frac{dZ(\mu)}{d\mu} &= \sum_n (\sigma^z \lambda^{(2n+1)}) \mu^{-(2n+1)} \\ \pm i W_2(\mu) &= 2 \sum_n (\sigma_+ - \sigma_-) \lambda^{2n} \mu^{-2n} - 2 \sum_n (\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2n+1} \mu^{-(2n+1)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Les vecteurs de plus haut poids $|\Lambda_{\pm}\rangle$ étant alors identifiés au vide $|0\rangle$. Seul le signe devant $W_2(\mu)$ distingue les deux représentations. Pour le lecteur intéressé, une rapide preuve de la validité de cette représentation est donnée dans l'annexe C. On montrera en particulier qu'il s'agit bien d'une représentation de niveau un, c'est-à-dire que $k = 1$. Remarquons aussi que (3.42) nous montre que $\sigma^z \lambda^{(2n+1)}$ est représentée par p_{2n+1} . Ainsi les opérateurs de vertex sont la représentation des éléments suivants du groupe de H_{aft}

$$W_u(\mu) = \exp\left(-\frac{u}{2}\sigma^z \log\left(\frac{1+\mu/\lambda}{1-\mu/\lambda}\right)\right) \exp\left(\frac{u}{2}\sigma^z \log\left(\frac{1+\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}\right)\right)$$

L'algèbre de Virasoro peut être elle aussi représentée à partir du champ bosonique $Z(\mu)$

$$L_n = -\frac{1}{8\pi i} \oint_C d\mu \mu^{2n+1} : (i\partial_\mu Z)^2 : + \frac{1}{16} \delta_{n,0} \quad (3.43)$$

Par application des vecteurs du plus haut poids, nous constatons que ces représentations ont pour poids conforme $h_{\Lambda_{\pm}} = \frac{1}{16}$.

Comment cette représentation peut-elle nous venir en aide? Nous allons nous appuyer sur [31] dont nous rappellerons ici les principaux résultats. Considérons des éléments $g(j) = g_-^{-1}(j)g_+(j)$ de H_{aft} définis par

$$g_{\pm}(j) = e^{\pm r_j \frac{k}{2}} e^{v_j(\sigma_+ - \sigma_-)/2} e^{s_j \mathcal{E}(\mu_j)/2} \quad (3.44)$$

avec

$$\mathcal{E}_{\pm}(\mu) = \pm \left((\sigma_+ - \sigma_-) \frac{1 + (\lambda/\mu)^{\pm 2}}{1 - (\lambda/\mu)^{\pm 2}} - (\sigma_+ + \sigma_-) \frac{2(\lambda/\mu)^{\pm 2}}{1 - (\lambda/\mu)^{\pm 2}} \right) \quad (3.45)$$

D'après [31], le produit d'opérateurs de vertex $\prod_{j=1}^n (1 \pm iy_j W_2(\mu_j))$ s'interprète en terme de produit d'éléments factorisés $g_-^{-1}g_+$. De manière plus précise, nous avons la relation

$$g_-^{-1}(n) \dots g_-^{-1}(1)g_+(1) \dots g_+(n) = \prod_{j=1}^n (1 \pm iy_j W_2(\mu_j)) \quad (3.46)$$

où \pm est à relier au choix de la représentation. Il est assez facile de déterminer r_j et s_j en fonction de μ_j et y_j . Il suffit pour cela de considérer la valeur moyenne de la relation précédente et d'utiliser (3.44). Nous obtenons alors l'identité

$$\exp \left(\sum_{j=1}^n \left(r_j \pm i \frac{s_n}{2} \right) \right) = \left\langle \prod_{j=1}^n (1 \pm iy_j W_2(\mu_j)) \right\rangle \quad (3.47)$$

Le calcul du membre de droite s'effectue grâce à la formule démontrée dans l'annexe C

$$\left\langle \prod_q W_{u_q}(\mu_q) \right\rangle = \prod_{p < q} \left(\frac{\mu_p - \mu_q}{\mu_p + \mu_q} \right)^{u_q u_p / 2} \quad (3.48)$$

La détermination de r_j et s_j se fait alors par itérations succesives de la formule (3.47) en ajoutant avec chaque étape un nouveau terme $1 \pm y_j W_2(\mu_j)$. Reste maintenant à déterminer v_j . Introduisons pour cela les quantités φ_j et φ_j^*

$$\varphi_j = -2 \sum_{k=1}^j s_k \quad \text{et} \quad \varphi_j^* = -2 \sum_{k=1}^j v_k \quad (3.49)$$

Nous poserons $\varphi_0 = 0$. Ainsi nous avons $s_j = -\frac{1}{2}(\varphi_j - \varphi_{j-1})$. φ_j et φ_j^* sont fonction des variables μ_k et y_k . Nous noterons cette dépendance $\phi(y_k, \mu_k)$. Un des résultats importants de [31] est la relation entre ces deux quantités

$$\varphi_j^*(y_k, \mu_k) = \varphi_j(\beta_{j+1,k} y_k, \mu_k) \quad \text{avec} \quad \beta_{j,k} = \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_j + \mu_k} \quad (3.50)$$

Remarquons que cette relation ne nous permet pas de déterminer v_n , ce qui est en accord avec la liberté du choix de jauge. D'ailleurs, pour faire le lien avec la notation

$$g_{\pm} = \exp \left(\pm \frac{\eta}{2} k \right) \exp \left(-\frac{\varphi_{\pm}}{2} (\sigma^+ - \sigma^-) \right) \cdot (\text{termes de degré } \geq \pm 1)$$

nous pouvons exprimer φ_{\pm} en fonction de φ_n et φ_n^* . Nous obtenons aisément la relation

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{2} (\varphi_n^* \pm \varphi_n) \quad (3.51)$$

Par la suite, nous utiliserons une généralisation de (3.46). De manière générale, nous emploierons des éléments du groupe d'habillage définis par

$$g = \left(\prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 \pm i y_j W_2(\mu_j)) \quad (3.52)$$

Ainsi d'un point de vue pratique, se donner une métrique est équivalent à considérer un ensemble de paramètres $\{\mu_k, \mu_j, y_j\}$ définissant l'élément du groupe d'habillage dans la représentation de niveau un.

3.3.2 Evaluation des fonctions τ

Pour la suite de cet exposé, nous aurons besoin des expressions des fonctions τ pour les éléments du groupe d'habillage tels que (3.52). Nous utiliserons la formule de conjugaison d'un opérateur de vertex par la solution du vide donnée dans l'annexe C

$$\Psi_v W_u(\mu) \Psi_v^{-1} = \rho^{u^2/2} \left(\frac{\mu_+(a(z_+)+\frac{1}{2})}{\mu_-(b(z_-)+\frac{1}{2})} \right)^{u^2/2} W_u \left(\frac{\mu_+(a(z_+)+\frac{1}{2})\mu_-(b(z_-)+\frac{1}{2})}{\mu} \right) \quad (3.53)$$

avec

$$\mu_+(A)^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + (1 - \mu^2)A} \quad \text{et} \quad \mu_-(B)^2 = 1 + (\mu^2 - 1)B \quad (3.54)$$

Pour simplifier ces expressions, nous allons choisir une paramétrisation de l'espace plus conviviale. Nous poserons $t = \rho$. Grâce à ce choix, la relation (3.53) peut se reformuler de la manière suivante

$$\Psi_v W_{u_i}(\mu_i) \Psi_v^{-1} = X_i^{u_i/4} W_{u_i}(w_i) \quad (3.55)$$

avec

$$X_i = \rho \frac{z_i^2 - 1}{(z_i - z)^2 - \rho^2}, \quad w_i^2 = \frac{z_i - z + \rho}{z_i - z - \rho} \quad \text{et} \quad z_i = \frac{\mu_i^2 - 1}{\mu_i^2 + 1}$$

Le calcul de la fonction τ est direct en tenant compte des précédents résultats et ceux de l'annexe C

$$\tau_0 = \Omega \tau(Y_j | w_j) \quad (3.56)$$

avec

$$Y_j = y_j X_j \left(\prod_{k=1}^m B_{jk}^{u_k} \right), \quad B_{jk} = \frac{w_j - w_k}{w_j + w_k} \quad (3.57)$$

$$\tau(Y_j | w_j) = \det \left(1 + 2i \frac{w_i Y_j}{w_i + w_j} \right), \quad \Omega = \left(\prod_{k=1}^m X_k^{u_k^2/4} \right) \left(\prod_{k < l} B_{kl}^{u_k u_l/2} \right)$$

Pour $\tau_{(\pm 1)}$, le résultat est pratiquement identique. En utilisant (C.12) et (C.13), nous remarquons qu'il suffit de remplacer dans (3.56) les produits $X_{k_1}^{u_{k_1}/4} \dots X_{k_p}^{u_{k_p}/4}$ par

$$X_{k_1}^{u_{k_1}/4} \dots X_{k_p}^{u_{k_p}/4} \longrightarrow X_{k_1}^{u_{k_1}/4} \dots X_{k_p}^{u_{k_p}/4} \left(\sum_{l=1}^p u_{k_l} w_{k_l}^{-1} \right) \quad \text{pour} \quad \tau_{(+1)}$$

$$X_{k_1}^{u_{k_1}/4} \dots X_{k_p}^{u_{k_p}/4} \longrightarrow -X_{k_1}^{u_{k_1}/4} \dots X_{k_p}^{u_{k_p}/4} \left(\sum_{l=1}^p u_{k_l} w_{k_l} \right) \quad \text{pour} \quad \tau_{(-1)}$$

Il est possible d'obtenir des formules plus simples pour $\tau_{(\pm 1)}$. Introduisons pour cela un paramètre supplémentaire w_0 . Grâce aux identités triviales

$$\begin{aligned}\partial_{w_0} B_{0i}^{-1}|_{w_0=0} &= \partial_{w_0} \left(\frac{w_0 + w_i}{w_0 - w_i} \right) |_{w_0=0} = -2w_i^{-1} \\ \partial_{1/w_0} B_{0i}^{-1}|_{1/w_0=0} &= \partial_{1/w_0} \left(\frac{w_0 + w_i}{w_0 - w_i} \right) |_{1/w_0=0} = 2w_i\end{aligned}$$

nous obtenons les formules

$$\overline{\tau_{(+1)}} = \Omega \left(\sum_{i=1}^m u_i w_i^{-1} \right) \partial_{w_0} \tau \left(B_{0j}^{-1} Y_j | w_j \right) |_{w_0=0} \quad (3.58)$$

$$\overline{\tau_{(-1)}} = -\Omega \left(\sum_{i=1}^m u_i w_i \right) \partial_{1/w_0} \tau \left(B_{0j}^{-1} Y_j | w_j \right) |_{1/w_0=0} \quad (3.59)$$

3.4 Formulation algébrique des éléments de la métrique

Nous voici enfin arrivés au point où nous disposons de tous les outils nécessaires à la méthode permettant d'engendrer algébriquement des solutions aux équations de Ernst. Cette section sera consacrée à la présentation de ce résultat central qui constitue le coeur de l'article [17]. La méthode utilisée est analogue à celle de l'école de Kyoto [35, 36] pour la résolution de la hiérarchie KP à l'aide des opérateurs de vertex.

3.4.1 Opérateurs de vertex et dualité

Une fois que nous avons choisi un élément du groupe d'habillage grâce à un jeu de paramètres $\{\mu_k, \mu_j, y_j\}$, et si nous voulons utiliser les formules (3.23) et (3.25) nous donnant directement les éléments de la métrique, il est nécessaire de construire l'élément du groupe d'habillage associé à la métrique duale. Pour construire cet élément, nous allons nous appuyer sur le système d'équations (3.38).

Enonçons le résultat que nous allons obtenir

$$g = \text{const.} \left(\prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_2(\mu_j)) \quad (3.60)$$

$$g^* = \text{const.} W_{-1}(1) \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \quad (3.61)$$

Ainsi pour construire l'élément dual, il suffit d'inverser le signe des charges et de multiplier à gauche par $W_{-1}(1)$. Notons que nos éléments sont définis à une constante multiplicative près ne jouant aucun rôle sur les grandeurs physiques (puisque toutes les formules de ces dernières s'expriment comme des rapports de valeurs moyennes).

Pour simplifier la démonstration, nous nous limiterons au cas où $m = 0$. La preuve est basée sur le résultat suivant de l'article [31]

$$\begin{aligned}& \tau(B_{0k}^{-1} B_k Y_k) \overline{\tau(Y_k)} + \overline{\tau(B_{0k}^{-1} B_k Y_k)} \tau(Y_k) \\ &= \tau(B_{0k}^{-1} Y_k) \overline{\tau(B_k Y_k)} + \overline{\tau(B_{0k}^{-1} Y_k)} \tau(B_k Y_k)\end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}& \left(\frac{1 + w_0}{1 - w_0} \right) \left(\tau(B_{0k}^{-1} B_k Y_k) \overline{\tau(Y_k)} - \overline{\tau(B_{0k}^{-1} B_k Y_k)} \tau(Y_k) \right) \\ &= \tau(B_{0k}^{-1} Y_k) \overline{\tau(B_k Y_k)} - \overline{\tau(B_{0k}^{-1} Y_k)} \tau(B_k Y_k)\end{aligned} \quad (3.63)$$

avec $B_k = \frac{1-w_k}{1+w_k}$. Nous avons ici enlevé les variables w_i des fonctions τ pour alléger l'écriture de ces dernières. Pour les fonctions τ de la métrique initiale, nous avons

$$\tau_0 = \tau(Y_j) \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_{(+1)} = \partial_{w_0} \tau \left(B_{0j}^{-1} Y_j \right) \big|_{w_0=0} \quad (3.64)$$

Quant aux fonctions de la métrique duale, il nous faut tenir compte en particulier du terme $W_{-1}(1)$. Le calcul est évident en utilisant les formules du cas générique (3.56) et (3.58) et nous obtenons

$$\tau_0^* = \rho^{\frac{1}{4}} \tau(B_j Y_j) \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_{(+1)}^* = -\rho^{\frac{1}{4}} (\bar{\tau}(B_j Y_j) + \partial_{w_0} \tau(B_{0j} B_j Y_j) \big|_{w_0=0}) \quad (3.65)$$

Développons au premier ordre en w_0 (3.62) et (3.63). Nous en déduisons les relations suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(Y_j) \partial_{w_0} \tau(B_{0j} B_j Y_j) \big|_{w_0=0} - \bar{\tau}(B_j Y_j) \partial_{w_0} \tau(B_{0j} Y_j) \big|_{w_0=0} + \text{c.c.} &= 0 \\ \bar{\tau}(Y_j) \partial_{w_0} \tau(B_{0j} B_j Y_j) \big|_{w_0=0} - \bar{\tau}(B_j Y_j) \partial_{w_0} \tau(B_{0j} Y_j) \big|_{w_0=0} + 2\tau(B_j Y_j) \tau(Y_j) - \text{c.c.} &= 0 \end{aligned}$$

où c.c. désigne le complexe conjugué de la partie explicite de l'équation. En substituant les expressions (3.64) et (3.65) puis en sommant les deux équations, nous obtenons alors la première équation de dualité de (3.38). Un développement autour $\mu_0 \rightarrow \infty$ nous donnerait alors la seconde équation. Ce résultat s'étend facilement au cas $m \neq 0$.

Ainsi nous avons prouvé que l'opérateur de vertex g^* représentait bien la solution duale de la métrique associée à g .

3.4.2 Opérateurs de vertex et jauge triangulaire

La formule (3.23) suppose que nous puissions effectuer la factorisation de telle sorte que nous soyons dans la jauge triangulaire. Nous avons vu au paragraphe 3.2.2 un moyen d'effectuer la factorisation du champ ϕ pour se placer dans cette jauge. Or, ce choix peut se traduire dans le langage de la factorisation de l'élément du groupe d'habillage sur la composante sur $SO(2)$ déterminée par φ . En effet, nous avons les relations

$$\exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\langle g \rangle}{\langle g \rangle} \quad \text{et} \quad \exp\left(i\frac{\varphi^*}{2}\right) = \frac{\langle g^* \rangle}{\langle g^* \rangle} \quad (3.66)$$

En comparant avec (3.31) au point où la fonction d'onde du vide est égale à l'identité, nous en déduisons que $\varphi = \phi$ et $\varphi^* = \phi^*$ en ce point. Ainsi pour obtenir la jauge triangulaire au niveau de g , il nous suffit de transposer (3.34) à φ

$$\varphi_{\pm} = \frac{1}{2} (\varphi \pm \varphi^*) = \pm \varphi_{\pm}^* \quad (3.67)$$

Nous devons évaluer $g_-^{-1} \mathcal{E} g_+$ dans la représentation de niveau 1. Constatons tout d'abord que \mathcal{E} est associé à l'opérateur de vertex $iW_2(1)$. Le problème est résolu par les identités suivantes que nous allons démontrer

$$ig_-^{-1} W_2(1) g_+ = (a + ibW_2(1)) \left(\prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_2(\mu_j)) \quad (3.68)$$

$$ig_-^{*-1} W_2(1) g_+^* = (-ia^* + b^* W_1(1)) \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \quad (3.69)$$

Rappelons que le potentiel de Ehler est défini à une translation près sur sa partie réelle et à une dilatation près sur sa partie imaginaire. Ainsi nous pouvons ignorer dans la pratique les constantes a, a^*, b et b^* .

Revenons tout d'abord aux relations (3.66). En utilisant les représentations (3.60) et (3.61) et le calcul des valeurs moyennes associées, il est aisé d'obtenir la relation entre φ et φ^* puisqu'il suffit d'effectuer la substitution $y_j \longrightarrow \beta_j y_j$ avec $\beta_j = \frac{1-\mu_j}{1+\mu_j}$. Ainsi

$$\varphi^*(y_j) = \varphi(\beta_j y_j)$$

Si nous comparons maintenant l'expression du calcul de φ_{\pm} (3.51) dans la représentation de niveau un avec celle de la jauge triangulaire (3.67), nous voyons qu'en imposant la condition

$$\varphi_n^*(y_j) = \varphi_n(\beta_j y_j) \quad (3.70)$$

le choix de jauge sera vérifié. Pour obtenir une telle relation, il suffit d'insérer un élément $g(n+1) = g_-^{-1}(n+1)g_+(n+1)$ dans la décomposition $g_-^{-1}(1)\dots g_-^{-1}(n)g_+(n)\dots g_+(1)$ tel que sa représentation soit un élément de paramètre spectral 1, $\hat{a} + i\hat{b}W_2(1)$. Compte tenu de la relation (3.70), la représentation de ce nouvel élément va pouvoir s'écrire

$$g_-^{-1}(1)\dots g_-^{-1}\left(\hat{a} + i\hat{b}W_2(1)\right)(n)g_+(n)\dots g_+(1) = (a + ibW_2(1)) \prod_{j=1}^n (1 + y_j W_2(\mu_j))$$

où a et b sont des fonctions de \hat{a} et \hat{b} . En posant $\hat{a} = 0$ et $\hat{b} = 1$, nous retrouvons ainsi l'identité (3.68). Un raisonnement similaire nous permet de déduire la seconde relation (3.69).

3.4.3 Formule des déterminants

La dernière étape consiste à réunir l'ensemble des formules obtenues jusqu'à présent. Considérons un élément du groupe d'habillage g défini par l'ensemble des paramètres $\{\mu_k, \mu_j, y_j\}$. Grâce aux relations (3.60-3.61) et (3.68-3.69) nous savons construire une représentation de g et g^* ainsi qu'insérer \mathcal{E} dans la factorisation en préservant la jauge triangulaire. Il nous suffit donc d'appliquer les formules (3.24) et (3.25) permettant de calculer le potentiel de Ehler et le facteur conforme. Nous en déduisons les formules pour la métrique

$$e^{2\delta} = \left| \left\langle \left(\prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_2(\mu_j)) \right\rangle \right|^2 \quad (3.71)$$

$$N + i\Delta^{-1} = i \frac{\left\langle \Psi_v W_1(1) \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \Psi_v^{-1} \right\rangle}{\left\langle \Psi_v \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \Psi_v^{-1} \right\rangle} \quad (3.72)$$

et celles pour la métrique duale

$$e^{2\delta^*} = \left| \left\langle \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \right\rangle \right|^2 \quad (3.73)$$

$$N^* + i\Delta^{*-1} = i \frac{\left\langle \Psi_v W_2(1) \left(\prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_2(\mu_j)) \Psi_v^{-1} \right\rangle}{\left\langle \Psi_v \left(\prod_{k=1}^m W_{-u_k}(\mu_k) \right) \prod_{j=1}^n (1 + iy_j W_{-2}(\mu_j)) \Psi_v^{-1} \right\rangle} \quad (3.74)$$

L'évaluation des différentes valeurs moyennes a déjà été présentée au cours des précédents paragraphes. nous nous contenterons de donner le résultat final

$$e^{2\hat{\sigma}} = |\Omega\tau(Y_j|w_j)|^2 \quad (3.75)$$

$$e^{2\hat{\sigma}^*} = \rho^{\frac{1}{2}} |\Omega^*\tau(B_j Y_j|w_j)|^2 \quad (3.76)$$

$$N + i\Delta^{-1} = i \frac{\Omega_w^* \tau(B_j^{-1} Y_j|w_j)}{\Omega^* \tau(B_j Y_j|w_j)} \quad (3.77)$$

$$N^* + i\Delta^{*-1} = i\rho \frac{\Omega_w \tau(B_j^2 Y_j|w_j)}{\Omega \tau(Y_j|w_j)} \quad (3.78)$$

avec

$$\Omega^* = \left(\prod_{k=1}^m B_k^{u_k/2} \right) \Omega, \quad \Omega_w = \left(\prod_{k=1}^m B_k^{u_k} \right) \Omega \quad \text{et} \quad \Omega_w^* = \left(\prod_{k=1}^m B_k^{-u_k/2} \right) \Omega \quad (3.79)$$

Une expression des éléments de la métrique par les déterminants est proposée dans le formulaire que constitue l'annexe D.

Comme annoncé depuis le début, nous sommes arrivés à une expression des coefficients de la métrique ne nécessitant plus l'évaluation de quadrature. Et même s'il existait déjà dans la littérature des formules pour la gravité réduite à deux dimensions sous forme de déterminant comme celles de Letelier [6], la détermination du facteur conforme passait obligatoirement par le calcul d'une intégrale qui sauf rare cas (comme celui présenté dans la section 2.2.2) était non trivial.

3.5 Application à quelques exemples

Afin d'illustrer les formules obtenues précédemment, nous allons montrer comment il est possible de reconstruire les exemples de métriques décrits au chapitre 1 par un choix judicieux des paramètres spectraux et des charges.

3.5.1 Solutions diagonales

Les solutions diagonales correspondent au cas où $N = 0$. Du point de vue des opérateurs de vertex, ceci revient à prendre $y_i = 0$ et donc à choisir g de la forme

$$g = \prod_{k=1}^m W_{u_k}(\mu_k) \quad (3.80)$$

La solution la plus simple que nous puissions contruire est celle avec un seul opérateur

$$g = W_u(\mu) \quad \text{avec} \quad \mu \longrightarrow 1 \quad (3.81)$$

Pour toutes les applications que nous allons présenter, nous aurons souvent à effectuer des passages à la limite pouvant introduire l'apparition de facteurs constants non significatifs voire infinis. Ces derniers pourront être réabsorbés dans la définition du potentiel en utilisant les invariances de ces composantes suivant les transformations déjà explicitées auparavant. Pour le présent exemple, en s'appuyant sur (3.75) et (3.77), nous obtenons

$$e^{2\hat{\sigma}} = \rho^{u^2/2}$$

$$\Delta = \left(-\frac{\mu^2 - 1}{2(\mu^2 + 1)} \right)^u \rho^u = (\text{constante} \longrightarrow 0)^u \rho^u$$

Grâce à la remarque précédente, nous pouvons éliminer le facteur constant de Δ . En posant $t = \rho^{\frac{u^2+3}{4}}$ et en redéfinissant les coordonnées pour absorber les constantes non significatives, nous obtenons l'expression suivante de la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dz^2 + t^{2p_2} dx^2 + t^{2p_3} dy^2 \quad (3.82)$$

avec les facteurs $p_1 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 3}$, $p_2 = 2\frac{1 - u}{u^2 + 3}$ et $p_3 = 2\frac{1 + u}{u^2 + 3}$ vérifiant les relations

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad (3.83)$$

Cette solution correspond à la métrique de Kasner (2.45) que nous avons utilisée comme métrique initiale dans le cadre de l'application de la méthode de Belinski et Zakharov au paragraphe 2.2.2.2.

Comme autre métrique diagonale, nous pouvons essayer de reproduire celle de Khan-Penrose. L'opérateur à considérer est

$$g = W_1(\infty)W_1(0) \quad (3.84)$$

Pour retrouver l'expression donnée dans la section 1.6.3, nous poserons le changement de variable suivant

$$\rho = 1 - u^2 - v^2 \quad \text{et} \quad z = v^2 - u^2$$

Cette tranformation implique l'identité

$$-d\rho^2 + dz^2 = -8uvdudv$$

Le calcul étant sans grande difficulté, nous nous contenterons d'en donner les grandes étapes. Commençons par le facteur conforme. Pour cela, il nous faut évaluer le terme Ω qui vaut ici

$$\Omega = (X_0 X_\infty)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{w_\infty - w_0}{w_\infty + w_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or le calcul des différents facteurs nous donne

$$\begin{aligned} X_0 X_\infty &= \text{const} \frac{(1 - u^2 - v^2)^2}{16u^2v^2(1 - u^2)(1 - v^2)} \\ \frac{w_\infty - w_0}{w_\infty + w_0} &= \frac{(1 - u^2 - v^2)}{(uv + \sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)})^2} \end{aligned}$$

Remarquons que le terme $X_0 X_\infty$ est défini à un facteur constant nul après que nous pouvons réabsorber dans la définition du facteur conforme. Nous obtenons d'ailleurs pour ce dernier la formule suivante

$$e^{2\hat{\sigma}} = \frac{1}{4} \frac{(1 - u^2 - v^2)^2}{uv\sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)}(uv + \sqrt{(1 - u^2)(1 - v^2)})^2}$$

L'opérateur de vertex proposé ne possédant pas de terme de la forme $1 + iyW_2(\mu)$, le potentiel de Ernst se réduit à sa partie réelle Δ^{-1} . En appliquant la formule, nous avons

$$\Delta^{-1} = \left(\frac{1 - w_0}{1 + w_0} \right)^{-1} \left(\frac{1 - w_\infty}{1 + w_\infty} \right)^{-1}$$

L'évaluation de cette expression nous donne

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \frac{v^2 - u^2 - 1 - 2u\sqrt{1-v^2}}{1 - u^2 - v^2} \cdot \frac{-(1 - u^2 - v^2)}{1 + v^2 - u^2 - 2v\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1 + u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}}{1 - u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}}\end{aligned}$$

Au final, nous en déduisons l'expression suivante pour la métrique

$$\begin{aligned}ds^2 &= -2 \frac{(1 - u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}(uv + \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2})^2} dudv \\ &\quad + (1 - u^2 - v^2) \left(\frac{1 + u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}}{1 - u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}} dx^2 + \frac{1 - u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}}{1 + u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}} dy^2 \right)\end{aligned}\quad (3.85)$$

qui est bien identique à celle donnée au paragraphe 1.6.3.

3.5.2 Solutions non-diagonales

Pour obtenir des solutions non-diagonales à partir de la méthode présentée, il suffit de considérer le cas où nous avons un ensemble de valeurs y_j non nulles. Nous donnerons ici les transformations du groupe d'habillage, permettant de reproduire les métriques associées aux collisions d'onde planes avec des polarisations non-colinéaires présentées au paragraphe 1.6.3. Tous les calculs seront faits avec les coordonnées ξ et w . Le lecteur pourra trouver un certain nombre d'identités intervenant lors du calcul des valeurs moyennes dans l'annexe D.

La plus simple de ces solutions est celle de Chandrasekhar-Xanthopoulos. Elle est reproduite par

$$g = W_{-1}(\infty) W_{-1}(1) W_{-1}(0) \left(1 - i \frac{q}{4(p+1)} W_2(\infty) \right) \left(1 + i \frac{q}{4(p+1)} W_2(0) \right) \quad (3.86)$$

avec $p^2 + q^2 = 1$. Le calcul du potentiel de Ernst est assez direct. Nous avons vu que la métrique duale de

$$g^* = W_1(\infty) W_1(0) \left(1 - i \frac{q}{4(p+1)} W_{-2}(\infty) \right) \left(1 + i \frac{q}{4(p+1)} W_{-2}(0) \right) \quad (3.87)$$

On vérifiera aisément que le potentiel de Ernst associé est bien

$$\frac{\rho}{G_{22}^*} + i \frac{G_{12}^*}{G_{22}^*} = \frac{1 + p\xi + iq w}{1 - p\xi - iq w} \quad (3.88)$$

Pour terminer la présentation des exemples d'applications de nos formules, nous allons donner les opérateurs de vertex correspondant à la famille de solutions de Ernst qui est une généralisation de la métrique de Chandrasekhar et Xanthopoulos. Les opérateurs associés sont de la forme

$$W_{-n}(\infty) W_{-1}(1) W_{-1}(0) \left(1 + i \frac{q - q'}{4(p + p')} W_2(\infty) \right) \left(1 + i \frac{q + q'}{4(p + p')} W_2(0) \right) \quad (3.89)$$

avec $p^2 + q^2 = 1$ et $p'^2 + q'^2 = 1$. Bien que le calcul soit relativement plus long, il n'est pas plus difficile techniquement que les précédents. On vérifiera ainsi que les expressions des métriques associées à ces solutions et décrites au cours de la section 1.6.3 sont correctement reproduites.

3.6 Lien avec la méthode de Belinski et Zakharov

Cette section a pour but de mettre en parallèle notre méthode avec celle de Belinski et Zakharov. Nous commencerons par étudier l'exemple donné au paragraphe 2.2.2.2. Pour reproduire la métrique (2.47), nous utiliserons le produit d'opérateur de vertex suivant

$$g = W_u(1)W_{-1}(0) (1 + iyW_2(0)) \quad (3.90)$$

Nous poserons

$$e^{\frac{r}{2}} = \frac{(z+1)}{\rho} - \sqrt{\frac{(z+1)^2}{\rho^2} - 1}$$

et nous définirons les constantes

$$e^C = 4y \quad \text{et} \quad u = 2q$$

Les calculs sont alors similaires à ceux effectués pour les exemples précédents. Nous obtenons la métrique suivante

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{\rho^{2q^2} \cosh(qr + C)}{\sqrt{(z+1)^2 + \rho^2}} (-d\rho^2 + dz^2) + \frac{\cosh\left(\left(\frac{1}{2} + q\right)r + C\right)}{\cosh(qr + C)} \rho^{1+2q} dx^2 \\ & - \frac{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh(qr + C)} \rho dx dy + \frac{\cosh\left(\left(\frac{1}{2} - q\right)r - C\right)}{\cosh(qr + C)} \rho^{1-2q} dy^2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Nous retrouvons bien, aux notations des variables près, la métrique (2.47).

Intéressons-nous à la construction de g . Le premier opérateur à gauche $W_u(1)$ fut utilisé pour reproduire la métrique de Kasner (cf 3.5.1). Rappelons-nous que cette métrique fut employée comme solution initiale dans le calcul à un soliton. Ajouter un soliton à la solution initiale revient donc pour notre méthode à multiplier par $W_{-1}(0) (1 + iyW_2(0))$. Ici y joue le rôle de la constante d'intégration et les variables μ_j sont associées aux pôles mobiles. Sur ce dernier point, nous nous devons de donner plus de détails. Contrairement à [1] où les pôles dépendent des coordonnées, l'introduction de l'algèbre de Virasoro nous a permis de découpler les pôles qui sont des constantes intervenant uniquement dans le choix de l'élément du groupe d'habillage, et la dépendance vis-à-vis des coordonnées entièrement contenue dans la fonction d'onde du vide. On remarquera d'ailleurs que la conjugaison par cette dernière réintroduit la dépendance. Il est possible de faire le lien entre les pôles mobiles (2.37) que nous noterons $\mu_{i(\text{bz})}$ et les pôles w_i obtenus par conjugaison de la solution du vide. En effet, nous avons

$$\mu_{i(\text{bz})} = \rho B_i = (z - z_i) - \sqrt{(z - z_i)^2 - \rho^2} \quad (3.92)$$

Formellement nous pouvons aussi écrire cette formule sous la forme

$$\mu_{i(\text{bz})} = \rho \Psi_v \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right) \Psi_v^{-1} \quad (3.93)$$

traduisant le fait que les pôles mobiles sont obtenus par conjugaison d'expressions contenant des pôles fixes avec la solution du vide et en insistant sur le rôle de l'algèbre de Virasoro dans le découplage entre les pôles et les dépendance vis-à-vis des coordonnées.

Bien que les méthodes dérivées de [1] soient proches de celle présentée ici, l'introduction de l'algèbre de Virasoro est à l'origine de formules résolvant les difficultés techniques de ces dernières. Elle a permis d'éliminer le problème de l'intégration du facteur conforme et nous donne la possibilité de travailler avec des pôles constants, ce qui sera la base des travaux présentés dans le prochain chapitre.

3.7 Conclusions

Ceci termine la présentation de la méthode de résolution algébrique des équations dans le vide de la relativité générale réduite à deux dimensions. L'article [17] que nous avons publié sur ce sujet a permis de répondre aux questions laissées en suspend dans [16] : la résolution du problème de Riemann-Hilbert consistante avec le choix de jauge triangulaire, l'action de la dualité sur les opérateurs de vertex et l'obtention de formules pratiques et compactes pour les éléments de la métrique. De ce point de vue, notre objectif a été atteint. Le seul regret que nous puissions avoir concerne l'expression de dualité comme une involution agissant sur le groupe d'habillage. Nous n'avons pas souhaité aborder ce sujet dans cette présentation mais un petit paragraphe est dédié à ce sujet dans [17]. Bien qu'une expression de cette involution soit obtenue dans le cadre de la représentation de niveau 1, une formulation générale serait nécessaire pour généraliser notre méthode à d'autres systèmes intégrables.

Chapitre 4

Structure symplectique de la gravité réduite

Sommaire

4.1 (Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (2/2)	57
4.1.1 Engendrer les quantités conservées	57
4.1.2 Exemple de matrice r	61
4.1.3 Systèmes non-ultralocaux	63
4.2 Formulation Hamiltonienne de la gravité	64
4.2.1 Systèmes contraints	64
4.2.2 Structure symplectique de la gravité réduite	66
4.3 Formalisme de la matrice r pour la gravité réduite	69
4.3.1 Crochets pour la paire de Lax	69
4.3.2 Equations de Yang-Baxter modifiées	71
4.3.3 Comparaison avec les précédentes formulations et généralisation	73
4.4 Matrice de monodromie	75
4.5 Observables classiques	76
4.6 Conclusions et perspectives	80

4.1 (Brefs) rappels sur les systèmes intégrables (2/2)

Comme nous l'avons annoncé au paragraphe 2.1, cette section a pour objectif d'exposer quelques notions sur les systèmes intégrables sous l'angle de l'étude de la structure symplectique. Notre cadre de travail sera celui utilisé au cours de la première partie de ces rappels.

4.1.1 Engendrer les quantités conservées

Pour montrer qu'un système est intégrable, il faut être en mesure de pouvoir trouver une famille de quantités commutantes et conservées $\{\mathcal{I}_i\}$. Reprenons les équations (2.3) sur la fonctions d'onde Ψ

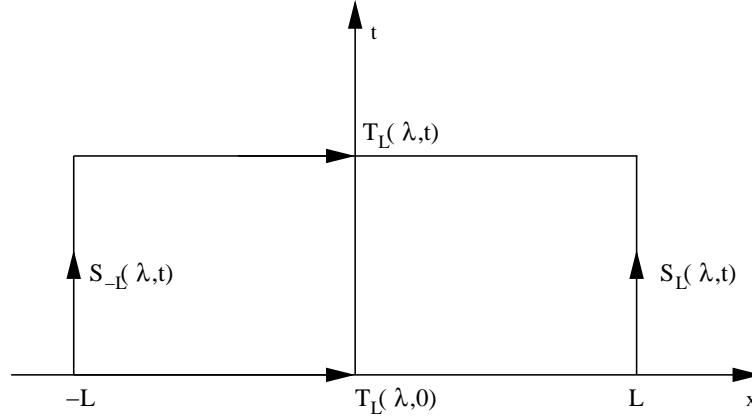
$$(\partial_x + A_x(x, t, \lambda)) \Psi(x, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$(\partial_t + A_t(x, t, \lambda)) \Psi(x, t) = 0 \quad (4.2)$$

La condition de courbure nulle nous permet d'écrire la solution générale sous la forme d'une intégrale ordonnée

$$\Psi(x, t) = \overrightarrow{\text{exp}} \left(- \int_{\gamma} A_x dx + A_t dt \right) \Psi(0, 0) \quad (4.3)$$

où γ est un contour reliant le point $(0, 0)$ au point (x, t) . La condition de courbure nous assure que cette intégrale ne dépend pas de γ . Considérons les deux chemins ci-dessous reliant les points $(-L, 0)$ et (L, t)



avec

$$\begin{aligned} T_L(\lambda, t) &= \overrightarrow{\text{exp}} \left(- \int_{-L}^L A_x(x, t, \lambda) dx \right) \\ S_L(\lambda, t) &= \overrightarrow{\text{exp}} \left(- \int_0^t A_t(L, \tau, \lambda) d\tau \right) \end{aligned}$$

Grâce à la condition de courbure nulle, nous pouvons déduire la relation

$$S_L(\lambda, t) T_L(\lambda, 0) = T_L(\lambda, t) S_{-L}(\lambda, t) \quad (4.4)$$

Nous allons raisonner avec des conditions périodiques sur l'intervalle $[-L, L]$ pour simplifier l'exposé. En utilisant cette hypothèse, nous avons

$$S_L(\lambda, t) = S_{-L}(\lambda, t)$$

Ceci permet de réécrire la relation (4.4) sous la forme

$$T_L(\lambda, t) = S_L(\lambda, t) T_L(\lambda, 0) S_L^{-1}(\lambda, t) \quad (4.5)$$

$T_L(\lambda, t)$ est appelé la matrice de monodromie. En prenant la trace de l'identité précédente, nous voyons clairement que la trace de la matrice de monodromie que nous noterons $\mathcal{I}(\lambda)$ est une quantité indépendante du temps. En développant $\mathcal{I}(\lambda)$ par rapport à λ , nous obtenons ainsi une infinité de quantités conservées.

A titre de remarque, nous noterons qu'au lieu de considérer la propriété de périodicité, nous pouvons prendre la limite $L \rightarrow \infty$. Ceci nécessite de pouvoir choisir correctement les conditions aux limites (dans le cas qui nous intéresse, cela ne sera pas sans poser de difficulté). Mais si un tel passage à la limite est possible, alors les propriétés que nous venons de présenter resteront valides.

Il nous faut maintenant vérifier que ces quantités conservées commutent entre elles. Nous allons introduire pour cela le formalisme de la matrice r . Nous aurons besoin d'utiliser la notation tensorielle suivante

$$A_1 = A \otimes I \quad \text{et} \quad A_2 = I \otimes A \quad (4.6)$$

Le crochet de Poisson $\{A_1, A_2\}$ entre deux quantités considérées sur des espaces différents est défini par

$$\{A_1, A_2\}_{kl,mn} = \{A_{km}, A_{ln}\} \quad (4.7)$$

La relation fondamentale pour l'étude des systèmes intégrables est le crochet de Poisson pour la composante x de la connexion de Lax $\{A_{x1}(x, t, \lambda_1), A_{x2}(y, t, \lambda_2)\}$. Dans la suite de chapitre et dans le but d'alléger l'écriture des formules, nous sous-entendrons l'indice x , la dépendance en t ainsi que celle en λ . Pour un grand nombre de systèmes tels que ceux de Toda (cf [30] par exemple), le crochet de Poisson pour la paire de Lax peut se mettre sous la forme

$$\{A_1(x, \lambda_1), A_2(y, \lambda_2)\} = [r_{12}(\lambda_1, \lambda_2), A_1(x, \lambda_1) + A_2(x, \lambda_2)]\delta(x - y) \quad (4.8)$$

où r_{12} est une matrice constante appelée matrice r . Remarquons que l'antisymétrie des crochets de Poisson impose que $r_{21} = P_{12}r_{12}P_{12} = -r_{12}$ avec P_{12} l'opérateur de permutation des espaces 1 et 2 défini par $P_{12}(A \otimes B)P_{12} = B \otimes A$. Comme nous le verrons par la suite, cette matrice joue un rôle primordial dans le cadre des systèmes intégrables. Les crochets (4.8) doivent vérifier l'identité de Jacobi. Ceci nous permet d'en déduire une équation sur la matrice r

$$\begin{aligned} & \{A_1(x), \{A_2(y), A_3(y)\}\} + \text{permutations circulaires} = 0 \\ \Leftrightarrow & [r_{12}, r_{13}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{23}, r_{12}] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ainsi r obéit à une équation purement algébrique, appelée équation classique de Yang-Baxter.

Soit $\Psi(x, y, t, \lambda)$ la matrice de transport définie par

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t, \lambda) &= \overrightarrow{\exp} \left(- \int_y^x A_x(q, t, \lambda) dq \right) \\ &= \Psi(x, t, \lambda) \Psi^{-1}(y, t, \lambda) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Comme son nom l'indique, $\Psi(x, y)$ permet de passer de la fonction d'onde d'un point d'espace à un autre. Remarquons tout de suite que T_L n'est autre que la matrice de transport considérée aux deux extrémités spatiales du système

$$T_L(\lambda, t) = \Psi(L, -L, t, \lambda)$$

Nous allons déterminer les crochets de Poisson pour la matrice de transfert. Dans un premier temps, rappelons la formule de dérivation de Leibniz

$$\{F_{ij}(x), F_{i'j'}(y)\} = \iint dz dz' \frac{\delta F_{ij}(x)}{\delta A_{mn}(z)} \{A_{mn}(z), A_{m'n'}(z')\} \frac{\delta F_{i'j'}(y)}{\delta A_{m'n'}(z')} \quad (4.11)$$

La difficulté du calcul réside dans la détermination de la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta \Psi(x, x_0)}{\delta A(z)}$. Il suffit pour cela de trouver une solution aux équations différentielles obtenues par variation de (4.1)

$$\begin{aligned} \partial_x \delta \Psi(x, x_0) + A(x) \delta \Psi(x, x_0) + \delta A(x) \Psi(x, x_0) &= 0 \\ \partial_{x_0} \delta \Psi(x, x_0) - \delta \Psi(x, x_0) A(x_0) - \Psi(x, x_0) \delta A(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

En tenant compte de la condition aux limites $\Psi(x, x_0) = 1$, la solution de ce système est donnée par

$$\delta\Psi(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Theta(x-z) \Theta(z-x_0) \Psi(x, z) \delta A(z) \Psi(z, x_0)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction d'Heaviside ($\Theta(x) = 1$ pour $x > 0$ et 0 ailleurs). En utilisant (4.11), nous en déduisons que la relation de commutation pour les matrices de transport peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \{\Psi_1(x, x_0), \Psi_2(y, y_0)\} \\ &= \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y dz dz' \Psi_1(x, z) \Psi_2(y, z') \{A_1(z), A_2(z')\} \Psi_1(z, x_0) \Psi_2(z', y_0) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation du mouvement (4.1) et la relation de commutation pour la connexion (4.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \{\Psi_1(x, x_0), \Psi_2(y, y_0)\} \\ &= - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y dz dz' \delta(z-z') \Psi_1(x, z) \Psi_2(y, z') r_{12} (\partial_z + \partial_{z'}) \Psi_1(z, x_0) \Psi_2(z', y_0) \\ & \quad - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y dz dz' \delta(z-z') ((\partial_z + \partial_{z'}) \Psi_1(x, z) \Psi_2(y, z')) r_{12} \Psi_1(z, x_0) \Psi_2(z', y_0) \end{aligned}$$

En tenant compte de chaque cas possible suivant les valeurs de x, x_0, y et y_0 , la relation précédente peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(x, x_0), \Psi_2(y, y_0)\} &= -\Theta(x, y, x_0) \Psi_1(x, y) r_{12} \Psi_1(y, x_0) \Psi_2(y, y_0) \\ & \quad -\Theta(y, x, y_0) \Psi_1(y, x) r_{12} \Psi_1(x, x_0) \Psi_2(x, y_0) \\ & \quad +\Theta(y, y_0, x_0) \Psi_1(x, y_0) \Psi_2(y, y_0) r_{12} \Psi_1(y_0, x_0) \\ & \quad +\Theta(y, x_0, y_0) \Psi_1(x, x_0) \Psi_2(y, x_0) r_{12} \Psi_2(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec $\Theta(x, y, z) = 1$ pour $x > y > z$ et 0 ailleurs. Que ce passe-t-il si nous cherchons cette relation pour des points coïncidents, c'est-à-dire pour $x = y$ et $x_0 = y_0$? Il nous faut pour cela choisir une convention pour la fonction de Heaviside au point 0. Si nous posons $\Theta(0) = 1$, nous obtenons alors

$$\{\Psi_1(x, x_0), \Psi_2(x, x_0)\} = -[r_{12}, \Psi_1(x, x_0) \Psi_2(x, x_0)] \quad (4.13)$$

Pour valider la convention que nous avons choisi, il faut vérifier que la relation précédente satisfait bien l'identité de Jacobi. Le calcul fait intervenir la permutation circulaire de l'expression

$$\begin{aligned} \{\Psi_1, \{\Psi_2, \Psi_3\}\} &= (r_{23}r_{12} + r_{23}r_{13}) \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \\ & \quad + \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 (r_{12}r_{23} + r_{13}r_{23}) \\ & \quad - r_{23} \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 r_{12} - r_{12} \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 r_{23} \\ & \quad - r_{23} \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 r_{13} - r_{13} \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 r_{23} \end{aligned}$$

où nous avons omis les coordonnées des points x et x_0 et utilisé le fait que deux matrices agissant sur des espaces différents commutent. Comme $r_{12} = -r_{21}$, l'identité de Jacobi peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \{\Psi_1, \{\Psi_2, \Psi_3\}\} + \text{perm.} &= ([r_{12}, r_{13}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{23}, r_{12}]) \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \\ & \quad - \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 ([r_{12}, r_{13}] + [r_{23}, r_{13}] + [r_{23}, r_{12}]) \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'équation de Yang-Baxter (4.9) assure alors que l'identité de Jacobi est bien vérifiée.

Grâce à la relation (4.13), nous déduisons facilement les crochets de Poisson pour la matrice monodromie en posant $x = L$ et $x_0 = -L$. En prenant la trace de cette relation et en utilisant le fait que la trace d'un commutateur est nulle, nous obtenons que

$$[\mathcal{I}(\lambda), \mathcal{I}(\lambda)] = 0$$

prouvant ainsi que la famille de quantités conservées construite à partir de la matrice de monodromie est bien une famille de quantités Poisson-commutant. Le dernier point à prouver pour que le système soit intégrable consiste à montrer que cette famille possède un nombre suffisant d'éléments pour pouvoir linéariser les équations du mouvement. Ce problème est directement relié à la résolution de l'équation de la fonction d'onde, nous n'aborderons pas plus ce sujet laissant le lecteur intéressé consulter [25] pour une revue sur ce thème.

4.1.2 Exemple de matrice r

Un des résultats clés que nous présenterons par la suite consiste à évaluer la matrice r pour la gravité réduite. Nous avons souhaité illustrer ce type de calcul par un exemple plus simple pour mettre en évidence la méthodologie.

Le modèle que nous allons considérer est celui de sh-Gordon. Celui-ci est défini par l'équation du mouvement

$$\partial_+ \partial_- \varphi = 2m^2 \text{sh}(2\varphi) \quad (4.15)$$

pour le champ scalaire φ . La paire de Lax associée à ce système est

$$A_+ = \frac{1}{2} \partial_+ \varphi T_z + mT_+ \lambda e^\varphi + mT_- \lambda e^{-\varphi} \quad (4.16)$$

$$A_- = -\frac{1}{2} \partial_- \varphi T_z + mT_+ \lambda^{-1} e^{-\varphi} + mT_- \lambda^{-1} e^\varphi \quad (4.17)$$

Ces quantités sont définies sur l'algèbre de boucle $sl(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ déformée par un automorphisme d'ordre 2, identique à celle définie au paragraphe 1.5 avec pour les générateurs de $sl(2, \mathbb{R})$

$$[T_z, T_\pm] = 2T_\pm \quad \text{et} \quad [T_+, T_-] = T_z \quad (4.18)$$

On vérifiera aisément que la condition de courbure nulle pour cette paire de Lax nous redonne bien l'équation du mouvement (4.15). En partant du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - 4m^2 \text{ch}(2\varphi) \quad (4.19)$$

nous déduisons la formulation hamiltonienne de la théorie et en particulier le moment associé à φ

$$\Pi_\varphi = \partial_t \varphi \quad \text{et} \quad \{\varphi(x), \Pi_\varphi(y)\} = \delta(x - y) \quad (4.20)$$

Nous aurons besoin de l'expression de la connexion suivant x

$$A_x = \frac{1}{2} \Pi_\varphi T_z + mT_+ (\lambda e^\varphi + \lambda^{-1} e^{-\varphi}) + mT_- (\lambda e^{-\varphi} + \lambda^{-1} e^\varphi) \quad (4.21)$$

Grâce à cette formule, nous pouvons calculer les crochets de Poisson pour la paire de Lax

$$\begin{aligned} \{A_1(x), A_2(y)\} = & -mT_{+1}T_{z2}(\lambda_1 e^\varphi - \lambda_1^{-1}e^{-\varphi})\delta(x-y) \\ & +mT_{-1}T_{z2}(\lambda_1 e^{-\varphi} - \lambda_1^{-1}e^\varphi)\delta(x-y) \\ & +mT_{z1}T_{+2}(\lambda_2 e^\varphi - \lambda_2^{-1}e^{-\varphi})\delta(x-y) \\ & -mT_{z1}T_{-2}(\lambda_2 e^{-\varphi} - \lambda_2^{-1}e^\varphi)\delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nous voulons arriver à reformuler cette expression à l'aide d'une matrice r et obtenir une équation de la forme (4.8). Pour cela nous cherchons une matrice r de la forme

$$r_{12} = f(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{z2} + g_1(\lambda_1, \lambda_2)T_{+1}T_{-2} + g_2(\lambda_1, \lambda_2)T_{-1}T_{+2}$$

Notons que cette forme est assez naturelle compte-tenu de la forme de Killing que nous avons choisie (cf. (4.18)). Nous donnerons volontairement tous les détails de calcul, l'idée étant de bien faire comprendre comment nous aboutissons au résultat sur cet exemple simple pour pouvoir se limiter aux points importants lorsque nous aurons affaire à des cas plus complexes.

$$\begin{aligned} [f(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{z2}, A_1 + A_2] &= 2mf(\lambda_1, \lambda_2)T_{+1}T_{z2}(\lambda_1 e^\varphi + \lambda_1^{-1}e^{-\varphi}) \\ &\quad - 2mf(\lambda_1, \lambda_2)T_{-1}T_{z2}(\lambda_1 e^{-\varphi} + \lambda_1^{-1}e^\varphi) \\ &\quad + 2mf(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{+2}(\lambda_2 e^\varphi + \lambda_2^{-1}e^{-\varphi}) \\ &\quad - 2mf(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{-2}(\lambda_2 e^{-\varphi} + \lambda_2^{-1}e^\varphi) \\ [g_1(\lambda_1, \lambda_2)T_{+1}T_{-2}, A_1 + A_2] &= mg_1(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{-2}(\lambda_1 e^{-\varphi} + \lambda_1^{-1}e^\varphi) \\ &\quad - mg_1(\lambda_1, \lambda_2)T_{+1}T_{z2}(\lambda_2 e^\varphi + \lambda_2^{-1}e^{-\varphi}) \\ [g_2(\lambda_1, \lambda_2)T_{-1}T_{+2}, A_1 + A_2] &= -mg_2(\lambda_1, \lambda_2)T_{z1}T_{+2}(\lambda_1 e^\varphi + \lambda_1^{-1}e^{-\varphi}) \\ &\quad + mg_2(\lambda_1, \lambda_2)T_{-1}T_{z2}(\lambda_2 e^{-\varphi} + \lambda_2^{-1}e^\varphi) \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'identifier les différents coefficients. Nous obtenons ainsi les équations

$$\begin{aligned} 2f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_1 - g(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_2 &= -\lambda_1 \\ 2f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_2 - g(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_1 &= \lambda_2^{-1} \end{aligned}$$

Le système d'équation étant le même pour g_1 et g_2 , nous avons posé $g = g_1 = g_2$. La résolution de ce système nous permet de déduire la forme de la matrice r

$$r_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}T_{z1}T_{z2} - \frac{1}{2}\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}(T_{+1}T_{-2} + T_{-1}T_{+2}) \quad (4.23)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, les fonctions rationnelles doivent être développées pour avoir un sens comme élément de l'algèbre de boucle. Nous avons deux possibilités pour ce développement : la convention + correspond au choix $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ et la convention - est associée au choix $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Pour chaque convention, nous avons donc une matrice r associée que nous noterons r_{12}^\pm . Les grandeurs que nous calculons doivent être indépendante de ce choix et en particulier l'équivalent de (4.8) pour ce modèle. Or, la différence des matrices r avec les conventions opposées peut être évaluée et vaut

$$r_{12}^+ - r_{12}^- = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(T_{z1}T_{z2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n} + (T_{+1}T_{-2} + T_{-1}T_{+2}) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n+1} \right) = \mathcal{C}_{12} \quad (4.24)$$

où \mathcal{C}_{12} est le Casimir de l'algèbre vérifiant la propriété

$$[\mathcal{C}_{12}, X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2] = 0 \quad (4.25)$$

Ainsi nous avons bien $[r_{12}^+ - r_{12}^-, A_1 + A_2] = 0$, ce qui prouve que l'expression des crochets de Poisson pour la paire de Lax à l'aide de la matrice r est indépendante du choix de la convention. r_{12} possède d'autres propriétés permettant aux crochets d'être valides. En effet, l'identité $r_{21}^\pm = -r_{12}^\mp$ est vérifiée (puisque l'opération d'échange des espaces revient ici à permuter λ_1 et λ_2) et donc l'antisymétrie des crochets de Poisson. On prouve aisément que r_{12} obéit à l'équation de Yang-Baxter. En effet, les fonctions rationnelles f et g vérifient la relation

$$g(\lambda_1, \lambda_3) g(\lambda_3, \lambda_2) + f(\lambda_2, \lambda_3) g(\lambda_1, \lambda_2) + f(\lambda_3, \lambda_1) g(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad (4.26)$$

et ses permutations circulaires. Grâce à cette formule et aux équations (E.11-E.14) de l'annexe E avec la notation $c_{12} = T_{z1}T_{z2}$ et $d_{12} = T_{+1}T_{-2} + T_{-1}T_{+2}$, on démontre que l'identité de Jacobi est satisfaite.

Le modèle de sh-Gordon est en fait un cas particulier des modèles de Toda qui généralisent ce que nous venons de voir à d'autres algèbres (cf. [30] pour une présentation détaillée). Même si nous ferons référence à ces modèles par la suite, l'image du modèle de sh-Gordon sera suffisante pour une bonne compréhension.

Nous souhaiterions insister sur le rôle du formalisme de la matrice r pour un système intégrable. Même si l'étude de la structure symplectique de la gravité réduite est intéressante en elle-même, il ne faut pas oublier qu'un des objectifs est d'arriver à quantifier ce système. Or, dès qu'un système est exprimé dans ce formalisme, il est possible de déployer l'ensemble des outils développés pour la quantification des systèmes intégrables. Sans entrer dans les détails puisque nous n'irons pas jusqu'à ce point dans le présent exposé, nous voudrions faire remarquer que le schéma de quantification consiste à associer à la matrice monodromie Ψ son équivalent quantique $\tilde{\Psi}$. L'analogue quantique de (4.13) et (4.9) sont

$$R_{12}\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2 = \tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_1R_{12} \quad (4.27)$$

$$R_{12}R_{12}R_{12} = R_{12}R_{12}R_{12} \quad (4.28)$$

où R_{12} est l'équivalent de r_{12} et est d'ailleurs reliée à cette dernière par le développement limité $R_{12} = 1 + i\hbar r_{12} + \dots$. On remarquera d'ailleurs que le développement limité des deux équations précédentes nous redonne bien (4.13) et (4.9). Il est donc important d'obtenir à la fois une formulation du type matrice r mais aussi les crochets sur la matrice de monodromie pour pouvoir aller au-delà du cas classique.

4.1.3 Systèmes non-ultralocaux

Nous terminons ces rappels par une brève présentation des systèmes non-ultralocaux. Celle-ci est inspirée de l'article de Maillet [37, 38]. Un système est dit ultralocal si le crochet de Poisson de la connexion de Lax associée ne fait intervenir que des distributions de Dirac $\delta(x - y)$. Jusqu'à présent, ce fut notre hypothèse de base puisque (4.8) vérifie cette propriété. Malheureusement un certain nombre de systèmes intéressants ne rentrent pas dans ce cadre. Parmi eux, nous pouvons citer la modèle de Sine-Gordon complexe, le modèle σ non linéaire basé sur l'algèbre $\mathfrak{o}(N)$ mais aussi la gravité réduite comme nous le verrons par la suite. Dans [37], les crochets considérés pour la paire de Lax sont

$$\begin{aligned} \{A_1(x, \lambda_1), A_2(y, \lambda_2)\} = & [r_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2), A_1(x, \lambda_1)]\delta(x - y) \\ & + [s_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2), A_2(x, \lambda_2)]\delta(x - y) \\ & + (s_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2) - r_{12}(y, \lambda_1, \lambda_2))\delta'(x - y) \end{aligned} \quad (4.29)$$

où nous avons cette fois-ci deux matrices r , notées r_{12} et s_{12} , pouvant dépendre des coordonnées. L'équation de Yang-Baxter modifiée qui en découle n'est plus a priori une équation purement algébrique. Le calcul de l'identité de Jacobi pour (4.29) donne

$$\begin{aligned} & [s_{23}(x, \lambda_2, \lambda_3), s_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2)] + [s_{23}(x, \lambda_2, \lambda_3), s_{13}(x, \lambda_1, \lambda_3)] \\ & + [s_{13}(x, \lambda_2, \lambda_3), r_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2)] + H_{1,23}^s(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - H_{2,13}^s(x, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec $H_{1,23}^s$ définie par

$$\{A_1(x, \lambda_1), s_{23}(y, \lambda_2, \lambda_3)\} = H_{1,23}^s(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \delta(x - y) \quad (4.31)$$

La principale difficulté liée aux systèmes non-ultralocaux provient du calcul des crochets de Poisson pour la matrice de transfert. Le calcul que nous avons mené pour obtenir (4.12) dépendait explicitement du fait que le modèle était ultralocal. Dans le cas non-ultralocal, même si le calcul des crochets de Poisson en des points distincts peut être mené, le passage à la limite pour obtenir la relation avec des points coïncidents conduit en général à une expression mal définie, c'est-à-dire ne vérifiant plus l'identité de Jacobi. Même s'il existe des moyens de régularisation [37] dans certains cas, nous verrons que dans le modèle que nous étudions, des problèmes subsistent.

4.2 Formulation Hamiltonienne de la gravité

4.2.1 Systèmes contraints

La gravité est, comme nous le verrons, un système contraint. Dans le but d'insister sur les conséquences des contraintes sur les calculs que nous mènerons par la suite, nous commencerons par rappeler quelques notions de base et notations utiles lors de l'étude hamiltonienne de tels systèmes. Cette présentation sera un condensé de [39].

Comme il s'agit d'une introduction, nous considérerons un système classique discret, sachant que l'extension à une théorie des champs classiques est triviale. Soit un système décrit par les coordonnées $\{q_n, \dot{q}_n\}$ et un Lagrangien L . Les moments p_n sont définis par

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

Nous supposons que notre système est contraint, c'est-à-dire qu'il existe I relations ϕ_i reliant les variables p et q

$$\phi_i(q, p) = 0 \quad (4.32)$$

Ces contraintes ϕ_i sont appelées contraintes primaires. Dans le cadre des systèmes non contraints, l'hamiltonien du système nous est donné par $H = p_n \dot{q}_n - L$. Or dès que nous avons des contraintes, toute quantité

$$H + c_i \phi_i \quad (4.33)$$

où les coefficients c_i sont des fonctions quelconques de p et q , est aussi un hamiltonien valable pour le système (pusique nous n'avons fait qu'ajouter des termes nuls).

Le calcul des équations hamiltonienne du mouvement sont obtenues par la méthode habituelle de variation pour un système contraint. Nous obtenons ainsi

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial p_n} \quad (4.34)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_n} \quad (4.35)$$

où les u_i sont des multiplicateurs de Lagrange. Regardons comment ces équations s'expriment à l'aide des crochets de Poisson. Nous prendrons pour définition de ces derniers

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n} \right) \quad (4.36)$$

Ainsi les équations (4.34-4.35) s'expriment sous la forme

$$\dot{q}_n = \{q_n, H\} + u_i \{q_n, \phi_i\} \quad \text{et} \quad \dot{p}_n = \{p_n, H\} + u_i \{p_n, \phi_i\}$$

Nous aurions donc envie de poser

$$H_T = H + u_i \phi_i$$

et d'écrire de manière générale

$$\dot{f} = \{f, H_T\}$$

Mais lorsque nous développons cette expression, nous avons un crochet $\{f, u_i\}$ qui n'est pas défini. Ce dernier étant en facteur de ϕ_i , nous serions tentés considérer sa contribution comme nulle. Mais un des points fondamentaux lorsque nous travaillons avec les crochets de Poisson sur un système contraint, est de ne pas utiliser les contraintes ϕ_i avant d'avoir terminé le calcul sous peine d'arriver à des inconsistances. Ces problèmes arrivent en particulier lorsque nous avons à vérifier l'identité de Jacobi : si le calcul est mené à partir d'expressions de crochets évalués sur la surface des contraintes, le résultat obtenu est alors erroné. C'est pourquoi il est commode d'utiliser la notation \approx à la place de l'égalité pour indiquer que nous avons fait appel aux contraintes pour obtenir le résultat. Nous parlerons alors d'égalité faible. Ainsi nous écrirons

$$\phi_i \approx 0$$

Dans ces conditions, nous pouvons toujours écrire l'identité

$$\dot{f} \approx \{f, H_T\} \quad (4.37)$$

Cette relation peut être appliquée en particulier aux contraintes ϕ_i . Ceci nous donne

$$\{\phi_i, H\} + u_j \{\phi_i, \phi_j\} \approx 0$$

Si le Lagrangien est correctement défini, ces nouvelles relations sont de deux types lorsque nous utilisons les contraintes : soit nous arrivons à la relation triviale $0 = 0$, soit nous aboutissons à de nouvelles contraintes $\chi(q, p) = 0$ que nous appellerons contraintes secondaires puisque produites par utilisation de l'Hamiltonien. Cette démarche doit être répétée autant de fois que nécessaire pour ne plus engendrer de nouvelles contraintes.

La dernière notion que nous introduirons est celle de contraintes de première et seconde classe. ϕ_i désignera à partir de maintenant aussi bien des contraintes primaires que secondaires. Une quantité f est de première classe si elle commute vis-à-vis des crochets de Poisson avec les contraintes (l'égalité étant considérée au sens faible)

$$\{f, \phi_i\} \approx 0 \quad (4.38)$$

Si f ne vérifie pas cette identité, elle est dite de seconde classe. Cette définition s'appliquant aussi aux contraintes, nous parlerons donc de contraintes de première et seconde classes.

Il est aisé de montrer que le crochet de Poisson de deux quantités de première classe est aussi de première classe. Ainsi, si nous notons ϕ_a les contraintes de première classe, nous en déduisons la relation

$$[\phi_a, \phi_b] = f_{ab}^c \phi_c \quad (4.39)$$

puisque ce crochet est faiblement égal à zéro et qu'il est de première classe. Les ϕ_a peuvent être vus comme les générateurs d'un groupe de transformations. En fait, il est même possible d'identifier ces générateurs comme étant ceux engendrant les transformations locales laissant invariant le système physique. Ainsi la variation infinitésimale d'une quantité g sous une de ces transformations sera donnée par

$$\delta g = \epsilon \{g, \phi_a\}$$

Remarquons que le nombre de ϕ_a est directement relié au nombre de fonctions arbitraires qui ne sont pas déterminées par la dynamique.

Comme dans le cadre de la mécanique quantique, il est possible de définir des observables en mécanique classique. Dans un système où nous avons des transformations locales laissant ce dernier invariant, il est naturel d'appeler observable toute quantité \mathcal{O} restant inchangée lors de l'application de ces transformations. Mathématiquement, ceci se traduit par une quantité ayant des crochets de Poisson nuls avec les contraintes de première classe

$$\{\phi_a, \mathcal{O}\} = 0 \quad (4.40)$$

L'une des plus belles applications de cette théorie est celle de la formulation Hamiltonienne de l'électromagnétisme. Le développement de cet exemple serait hors-sujet ici. Néanmoins, nous invitons le lecteur à regarder [39] pour une description de celui-ci.

4.2.2 Structure symplectique de la gravité réduite

Le rappel que nous venons de faire sur les systèmes contraints va pouvoir être appliquée à la gravité. En effet rappelons que la gravité est par construction invariante sous les reparamétrisations locales. D'après le précédent paragraphe, nous en déduisons donc qu'elle possède quatre contraintes de première classe. Or les générateurs des transformations associées à chaque direction sont les trois impulsions suivant les directions spatiales \mathcal{P}_{x_i} et l'Hamiltonien \mathcal{H} . Lors de la réduction dimensionnelle, nous nous attendons à ce que deux de ces contraintes subsistent : le générateur des difféomorphismes suivant la direction spatiale que nous noterons simplement \mathcal{P} et celui suivant la direction temporelle \mathcal{H} .

La formulation hamiltonienne de la gravité réduite est dérivée du modèle sigma non-linéaire présenté au paragraphe 2.3.2. Ce sujet ayant déjà été traité dans de nombreux articles (par exemple [22, 28, 24]), les concepts et notations développés ici seront identiques à ceux qu'il est possible de trouver dans la littérature. A une dérivation de la formulation à partir du modèle, nous préférons poser l'espace des phases et la structure symplectique et construire l'hamiltonien et les autres quantités nécessaire à partir de ces hypothèses de base.

Commençons par décrire l'espace des phases. Il est naturel de considérer les variables canoniques P_x, Q_x, ρ et $\hat{\sigma}$ avec leur moments associé $\Pi_P, \Pi_Q, \Pi_\rho, \Pi_{\hat{\sigma}}$. La structure symplectique est définie par les crochets de Poisson canonique

$$\begin{aligned} \{\rho(x), \Pi_\rho(y)\} &= \delta(x - y), & \{\hat{\sigma}(x), \Pi_{\hat{\sigma}}(y)\} &= \delta(x - y) \\ \{P_x(x), \Pi_P(y)\} &= \delta(x - y), & \{Q_x(x), \Pi_Q(y)\} &= \delta(x - y) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pour l'instant, nous n'avons pas encore relié les moments aux autres quantités présente dans la théorie. Nous poserons

$$\Pi_\rho = -\partial_t \hat{\sigma} \quad \text{et} \quad \Pi_{\hat{\sigma}} = -\partial_t \rho \quad (4.42)$$

ainsi que

$$-\rho P_t = \partial_x \Pi_P + [Q_x, \Pi_P] + [P_x, \Pi_Q] \quad (4.43)$$

Le seul champ que nous n'avons pas encore exprimé est Q_t . Il sera considéré comme un multiplicateur de Lagrange. Continuons maintenant avec les contraintes du système. Rappelons nous que le modèle sigma non-linéaire possède une invariance de jauge $SO(2)$. Nous avons donc une contrainte associée qui sera notée Φ . Elle sera définie par

$$\Phi = -\partial_x \Pi_Q - [Q_x, \Pi_Q] - [P_x, \Pi_P] \quad (4.44)$$

En plus de Φ , nous retrouvons les deux générateurs des difféomorphismes suivant x et t que nous avons déjà écrit auparavant. L'hamiltonien s'exprimera sous la forme

$$\mathcal{H} = -\Pi_\rho \Pi_{\hat{\sigma}} - \partial_x \rho \partial_x \hat{\sigma} + \frac{1}{2} \rho \text{tr} (P_t^2 + P_x^2) + \text{tr} (Q_t \Phi) \quad (4.45)$$

et le générateur suivant la direction spatial

$$\mathcal{P} = \Pi_\rho \partial_x \rho + \Pi_{\hat{\sigma}} \partial_x \hat{\sigma} + \rho \text{tr} (P_t P_x) + \text{tr} (Q_x \Phi) \quad (4.46)$$

Précisons que nous pouvons travailler non plus particulièrement sur l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$ mais sur une algèbre \mathfrak{g} comme nous l'avons défini au paragraphe 2.3.1, le but étant de pouvoir généraliser nos résultats à d'autres types de gravités réduites. Nous adopterons ce point vue et poursuivrons nos calculs avec cette hypothèse tant que nous pourrons éviter de faire intervenir les spécificités de la gravité réduite à deux dimensions. Nous noterons T^α les générateurs de l'algèbre \mathfrak{h} de Lie du sous groupe compact maximal associé à l'algèbre \mathfrak{g} , et T^a les générateurs de \mathfrak{k} tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k} \quad (4.47)$$

Pour les champs, les indices grecs se rapporteront à des composantes d'éléments de \mathfrak{h} , et les indices latins à des composantes d'éléments de \mathfrak{k} . Les générateurs seront choisis de telle manière que qu'ils soient orthonormés par rapport à la forme de Killing \mathcal{K}

$$\mathcal{K}(T^\alpha, T^\beta) = \delta^{\alpha, \beta}, \quad \mathcal{K}(T^a, T^b) = \delta^{a, b}, \quad \mathcal{K}(T^a, T^\alpha) = 0 \quad (4.48)$$

Les facteurs de forme seront notés

$$[T^a, T^b] = f^{ab}{}_\alpha T^\alpha \quad \text{et} \quad [T^\alpha, T^\beta] = f^{\alpha\beta}{}_\gamma T^\gamma \quad (4.49)$$

De part la forme de Killing, nous pouvons monter et descendre les indices à volonté. En particulier, quelle que soit la position des indices, les facteurs de forme sont invariants par permutation circulaire. Remarquons qu'avec cette algèbre générique, Φ devient la contrainte associée à l'invariance de jauge \mathbf{H} , le sous-groupe associé à \mathfrak{h} .

Il nous faut maintenant montrer que ces définitions sont cohérentes et que nous pouvons retrouver les équations du mouvement. Rappelons que pour toute quantité \mathcal{O} , nous avons

$$\{\mathcal{O}(x), H\} = \partial_t \mathcal{O}(x) \quad \text{avec} \quad H = \int dy \mathcal{H}(y) \quad (4.50)$$

Retrouvons l'équation du mouvement pour ρ

$$\{\Pi_{\hat{\sigma}}(x), \mathcal{H}(y), =\} - \partial_y \rho \partial_y \delta(x - y) \quad (4.51)$$

Après intégration par rapport à y et en substituant l'expression de $\Pi_{\hat{\sigma}}$, nous retrouvons à l'aide de (4.50)

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \rho = 0$$

Continuons avec une autre équation : celle pour $\hat{\sigma}$

$$\{\Pi_{\rho}(x), \mathcal{H}(y)\} = \partial_y \hat{\sigma} \partial_y \delta(x - y) - \frac{1}{2} \text{tr} (P_x^2 - P_t^2)$$

où nous avons utilisé l'identité

$$\{\Pi_{\rho}(x), P_t(y)\} = \rho^{-1}(x) P_t(y) \delta(x - y)$$

Ainsi nous en déduisons l'égalité

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \hat{\sigma} = \frac{1}{2} \text{tr} (P_x^2 - P_t^2)$$

Remarquons que la formule obtenue est celle du second ordre en $\hat{\sigma}$ (2.63) et non celles du premier ordre (2.61). Mais si nous considérons les contraintes $\mathcal{C}_{\pm} = \mathcal{H} \pm \mathcal{P}$, nous remarquons que celle-ci correspondent exactement à (2.61). Imposer ces contraintes nous permet donc de s'assurer que les équations du premier ordre en $\hat{\sigma}$ seront satisfaites.

Les équations pour les composantes P et Q sont un peu plus compliquées à obtenir.

$$\begin{aligned} \{P_x^a(x), P_t^b(y)\} &= -\rho^{-1}(y) \left(\partial_y \delta(x - y) \delta^{a,b} + f_{\alpha}{}^{ab} Q_x^{\alpha} \right) \\ \{P_x^a(x), \Phi^{\alpha}(y)\} &= f_b{}^{a\alpha} P_x^b(x) \delta(x - y) \end{aligned}$$

Cette dernière formule est à rapprocher de la loi (2.50) de transformation de P par une tranformation de jauge. Ceci montre concrètement le rôle de la contrainte Φ en tant que générateur de tranformation de jauge. Grâce aux deux expressions précédente, nous obtenons

$$\{P_x(x), \mathcal{H}(y)\} = -P_t(y) \partial_y \delta(x - y) + [Q_x, P_t] \delta(x - y) + [Q_t, P_x] \delta(x - y)$$

ce qui nous l'équation du mouvement

$$\partial_x P_t + [Q_x, P_t] = \partial_t P_x + [Q_t, P_x]$$

Les autres équations sont obtenues de la même manière sans aucune difficulté supplémentaire.

Nous terminerons par une liste de formules intervenant lors du calcul des crochets de Poisson de la connexion de Lax. Pour simplifier les expressions, nous avons employé la notation

$$c_{12} = T_{\alpha 1} T_2^{\alpha} \quad \text{et} \quad d_{12} = T_{a 1} T_2^a \quad (4.52)$$

Soulignons au passage que compte-tenu de la forme de Killing que nous avons choisi, le Casimir \mathcal{C}_{12} de l'algèbre \mathfrak{g} peut s'écrire à l'aide de (4.52)

$$\mathcal{C}_{12} = c_{12} + d_{12} \quad (4.53)$$

Voici la liste des crochets qui nous seront utiles

$$\{\Pi_\rho(x), P_t(y)\} = \rho^{-1}(x) P_t(y) \delta(x - y) \quad (4.54)$$

$$\{P_{t1}(x), P_{t2}(y)\} = \rho^{-2}(x) \delta(x - y) [d_{12}, \Phi_2(x)] \quad (4.55)$$

$$\{P_{t1}(x), P_{x2}(y)\} = \rho^{-1}(x) \delta'(x - y) d_{12} + \rho^{-1}(x) \delta(x - y) [d_{12}, Q_{x2}(x)] \quad (4.56)$$

$$\{P_{t1}(x), Q_{x2}(y)\} = \rho^{-1}(x) \delta(x - y) [d_{12}, P_{x2}(x)] \quad (4.57)$$

$$\{\Phi_1(x), \Phi_2(y)\} = \delta(x - y) [c_{12}, \Phi_2(x)] \quad (4.58)$$

$$\{P_{t1}(x), \Phi_2(y)\} = -\delta(x - y) [c_{12}, P_{t1}(x)] \quad (4.59)$$

$$\{P_{x1}(x), \Phi_2(y)\} = -\delta(x - y) [c_{12}, P_{x1}(x)] \quad (4.60)$$

$$\{Q_{x1}(x), \Phi_2(y)\} = \delta'(x - y) c_{12} + \delta(x - y) [c_{12}, Q_{x2}(x)] \quad (4.61)$$

4.3 Formalisme de la matrice r pour la gravité réduite

4.3.1 Crochets pour la paire de Lax

Notre objectif est de formuler les crochets de la connexion de Lax sous une forme proche de celle de systèmes non-ultralocaux [37, 38]. Les calculs étant relativement long, nous nous concentrerons ici sur l'étude du résultat reléguant la méthode d'obtention des formules dans l'annexe B.

Commençons par réexprimer les composante de la connexion à l'aide des variables introduites dans (4.2.2)

$$\begin{aligned} A_x = & -\frac{1}{2} \rho^{-1} (\Pi_{\hat{\sigma}} - \partial_x \rho) E_+ - \frac{1}{2} \rho^{-1} (\Pi_{\hat{\sigma}} + \partial_x \rho) E_- + \frac{1}{2} (P_{xa} + P_{ta}) T^a \lambda \\ & + \frac{1}{2} (P_{xa} - P_{ta}) T^a \lambda^{-1} + Q_{x\alpha} T^\alpha + \Pi_\rho \frac{k}{2} \end{aligned} \quad (4.62)$$

et

$$\begin{aligned} A_t = & -\frac{1}{2} \rho^{-1} (\Pi_{\hat{\sigma}} - \partial_x \rho) E_+ + \frac{1}{2} \rho^{-1} (\Pi_{\hat{\sigma}} + \partial_x \rho) E_- + \frac{1}{2} (P_{xa} + P_{ta}) T^a \lambda \\ & - \frac{1}{2} (P_{xa} - P_{ta}) T^a \lambda^{-1} + Q_{t\alpha} T^\alpha - \partial_x \hat{\sigma} \frac{k}{2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Le principal résultat obtenu dans [18] est le suivant

$$\begin{aligned} \{A_1(x), A_2(y)\} = & \frac{1}{\rho(x)} \delta(x - y) ([r_{12}^\epsilon, A_1(x)] + [s_{12}^\epsilon, A_2(x)]) \\ & + \left(\frac{1}{\rho(x)} s_{12} - \frac{1}{\rho(y)} r_{12} \right) \partial_x \delta(x - y) \\ & - \frac{1}{8} \frac{1}{\rho^2(x)} \delta(x - y) [U_{12}, \Phi_1(x) - \Phi_2(x)] \end{aligned} \quad (4.64)$$

Comme nous pouvons le constater, nous retrouvons bien une expression étendue du cas non-ultralocal avec les deux premiers termes du membre de droite équivalents à ceux de la relation (4.29) et en plus un troisième terme provenant de la contrainte d'invariance de jauge $SO(2)$. Détaillons chacune des matrices intervenant dans (4.64). La plus simple d'entre elles est celles issues de la contrainte

$$U_{12} = d_{12} (\lambda_1 - \lambda_1^{-1}) (\lambda_2 - \lambda_2^{-1}) \quad (4.65)$$

La définition des matrices r et s est plus compliqué

$$r_{12}^{\pm} = \frac{1}{2} \frac{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} c_{12} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \lambda_2^{-1} (1 - \lambda_2^2)^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} d_{12} \quad (4.66)$$

$$\mp \frac{1}{2} \left(E_{\pm} \otimes k + \frac{1}{2} k \otimes (E_+ + E_-) \right)$$

$$s_{12}^{\pm} = \frac{1}{2} \frac{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} c_{12} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1^{-1} \lambda_2 (1 - \lambda_1^2)^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} d_{12} \quad (4.67)$$

$$\mp \frac{1}{2} \left(k \otimes E_{\mp} + \frac{1}{2} (E_+ + E_-) \otimes k \right)$$

A l'image du modèle de Toda, nous obtenons deux couples de matrices possibles suivant la façon dont nous interprétons les fonctions rationnelles. La convention plus est associée au cas où $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ et la convention moins au cas $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. L'expression des formules totalement développées est proposée dans l'annexe B. Les crochets (4.64) sont valables pour les deux formulations (c'est pourquoi aucun indice \pm n'est présent).

Le point important à souligner est que ces matrices sont de pur nombre. Toute la dépendance vis-à-vis des coordonnées a été factorisée dans les facteurs ρ^{-1} . C'est ce qui différencie en particulier notre approche de celles qui avaient pu être obtenues auparavant. Nous discuterons d'ailleurs de ces différences dans un prochain paragraphe.

Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'exemple de Toda, il est important de vérifier que les crochets obtenus soient bien des crochets de Poisson. Par conséquent, nous devons montrer que (4.64) est antisymétrique, indépendant du choix de la convention $+/-$ et satisfait l'identité de Jacobi. Commençons par donner un certain nombre de relations purement algébriques auxquelles obéissent les matrices r , s et U

$$r_{12}^{\epsilon} = -s_{21}^{-\epsilon}, \quad r_{12}^{\epsilon} - r_{12}^{-\epsilon} = s_{12}^{\epsilon} - s_{12}^{-\epsilon}, \quad U_{12} = U_{21} \quad (4.68)$$

Grâce à ces formules, il en découle que

$$\{A_1(x), A_2(y)\} = -\{A_2(y), A_1(x)\} \quad (4.69)$$

Pour prouver que les crochets sur la connexion sont indépendants du choix de la convention, nous aurons besoin de la relation suivante

$$[r_{12}^{\epsilon} - r_{12}^{-\epsilon}, A_1 + A_2] = -(r_{12}^{\epsilon} - r_{12}^{-\epsilon}) (\rho^{-1} \partial_x \rho) \quad (4.70)$$

Donnons quelques indications sur la méthode employée pour obtenir cette formule. Remarquons tout d'abord que la différence entre les matrices r pour des conventions opposées peut s'écrire

$$r_{12}^{+} - r_{12}^{-} = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2) (1 - \lambda_2^{-2}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n} c_{12}$$

$$- \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n+1} d_{12} \quad (4.71)$$

$$- \frac{1}{2} (E_{+1} + E_{-1}) k_2 - \frac{1}{2} k_1 (E_{+2} + E_{-2})$$

Evaluons le commutateur suivant

$$\begin{aligned}
[r_{12}^+ - r_{12}^-, T_1^\alpha + T_2^\alpha] &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2) (1 - \lambda_2^{-2}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n} \left(f^{\beta\alpha}{}_\gamma T_1^\gamma T_{\beta 2} + f^{\gamma\alpha}{}_\beta T_1^\gamma T_{\beta 2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n+1} \left(f^{b\alpha}{}_a T_1^a T_{b 2} + f^{a\alpha}{}_b T_1^a T_{b 2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De la même manière (mais avec en plus terme sur la charge centrale) nous obtenons

$$[r_{12}^+ - r_{12}^-, T_1^a + T_2^a] = 0$$

La seule contribution provient des termes sur Virasoro. En utilisant le fait que

$$\lambda_2^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n+1} = \lambda_1^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{2n+1}$$

il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned}
[r_{12}^+ - r_{12}^-, E_{+1} + E_{+2}] &= -(r_{12}^+ - r_{12}^-) \\
[r_{12}^+ - r_{12}^-, E_{-1} + E_{-2}] &= (r_{12}^+ - r_{12}^-)
\end{aligned}$$

En rassemblant ces expressions, nous déduisons facilement (4.70).

A la différence des modèles intégrables habituels comme celui de Sh-Gordon, la différence entre les matrices r n'est pas proportionnel au Casimir de l'algèbre. Elle dépend même du champ ρ . Ceci est une conséquence des facteurs ρ^{-1} de (4.64). En se servant de (4.70), le calcul est direct

$$\begin{aligned}
\{A_1(x), A_2(y)\} \Big|_{\epsilon=+} - \{A_1(x), A_2(y)\} \Big|_{\epsilon=-} &= \rho^{-1}(x) [r_{12}^+ - r_{12}^-, A_1(x) + A_2(x)] \delta(x-y) \\
&\quad + (r_{12}^+ - r_{12}^-) (\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)) \partial_x \delta(x-y)
\end{aligned}$$

Comme

$$(\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)) \partial_x \delta(x-y) = \rho^{-2}(x) \partial_x \rho \delta(x-y) \quad (4.72)$$

nous obtenons bien le résultat désiré.

L'identité de Jacobi étant un point crucial, nous allons l'étudier en détail dans le prochain paragraphe.

4.3.2 Equations de Yang-Baxter modifiées

Le calcul brut de l'identité de Jacobi nous conduit au résultat suivant

$$\begin{aligned}
&\{A_1(x), \{A_2(y), A_3(z)\}\} + \text{perm.} \\
= &\rho^{-2}(x) \delta(x-y) \delta(y-z) ([A_1(x), A_{123}] + \text{perm.}) \\
&+ (\partial_x \rho^{-2}) \delta(x-y) \delta(y-z) (B_{123} + \text{perm.}) \\
&+ \rho^{-3}(x) \delta(x-y) \delta(y-z) ([\Phi_1(x), C_{123}] + \text{perm.}) \\
&+ \rho^{-2}(x) \delta(y-z) \partial_x \delta(x-y) D_{123} + \text{perm.}
\end{aligned} \quad (4.73)$$

Les expressions des coefficients A_{123} , B_{123} , C_{123} et D_{123} et des identités attachées sont données dans l'annexe E. Il y est montré que tous les coefficients se réexpriment à partir de A_{123} et C_{123} et que ces derniers sont invariants par permutation circulaire et nuls. Grâce à cela, nous en déduisons que les crochets de Poisson pour la connexion de Lax sont consistants.

Les relations $A_{123} = 0$ et $C_{123} = 0$ sont les équations de Yang-Baxter modifiées de notre modèle. La forme développée de celles-ci nous est donnée par

$$[r_{12}^{\epsilon_1}, r_{23}^{\epsilon_2}] + [s_{23}^{\epsilon_2}, s_{31}^{\epsilon_3}] + [s_{31}^{\epsilon_3}, r_{12}^{\epsilon_1}] - \frac{1}{2}k_2 s_{31}^{\epsilon_3} - \frac{1}{2}k_3 r_{12}^{\epsilon_1} - \frac{1}{4}[U_{23}, c_{12}] = 0 \quad (4.74)$$

$$[r_{23}^{\epsilon_2}, U_{12}] + [s_{23}^{\epsilon_2}, U_{13}] + \frac{1}{2}k_3 U_{12} - \frac{1}{2}k_2 U_{13} = 0 \quad (4.75)$$

Notons que le choix des conventions ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 doit être consistant. Par exemple si nous prenons $\epsilon_1 = +1$ et $\epsilon_2 = +1$ ce qui revient à considérer que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ et $|\lambda_2| < |\lambda_3|$, alors nous devons choisir ϵ_3 tel que $|\lambda_1| < |\lambda_3|$. Cette condition peut être résumée par la formule $|\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3| = 1$.

Ces équations de Yang-Baxter modifiées sont plutôt surprenante. Le modèle étant à la base non-ultralocal, d'après (4.30), nous nous serions attendus à une expression dépendant des coordonnées. Or (4.74) et (4.75) sont des équations ne faisant intervenir que des pures c-nombres. Comparons notre résultat à (4.30). Pour cela, il est nécessaire de remarquer que pour faire le liens entre nos matrices r et s et celles de (4.30), il faut considérer $\rho^{-1}r$ et $\rho^{-1}s$ pour que les formules des crochets de Poisson dans les deux cas puissent être compatibles. Faisons abstraction dans un premier temps du terme en U_{12} . En remarquant que

$$\{A_1(x), \rho^{-1}(y)r_{23}\} = -\frac{1}{2}\rho^{-2}(x)k_1 r_{23}\delta(x-y)$$

Ainsi $H_{1,23} = -\frac{1}{2}\rho^{-2}(x)k_1 r_{23}$. En considérant (4.30) avec

$$r_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \rho^{-1}r_{12} \quad \text{et} \quad s_{12}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \rho^{-1}s_{12}$$

en se servant de (4.68) et en factorisant par ρ^{-2} nous retrouvons bien, après une permutation circulaire sur les indices, les deux premiers termes de (4.74). Les termes faisant intervenir la matrice U_{12} sont issus de l'invariance de jauge \mathbf{H} . L'étude d'un système avec contrainte dans le cadre décrit par [37] aurait aussi fait apparaître ce type de contribution et nous aurait conduit à une seconde équation du type (4.75). Insistons sur le fait qu'un calcul naïf de (4.73) où les crochets de Poisson de la connexion seraient considérés sur la surface des contraintes n'aurait pas permis de vérifier l'identité de Jacobi, comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe 4.2.1.

Dans [18], nous avons introduit un modèle simplifié, sans dépendance vis-à-vis de coordonnées, permettant de reproduire ces équations de Yang-Baxter modifiées. Considérons trois objets L^\pm et ϕ obéissant à l'algèbre suivante

$$\begin{aligned} \{L_1^\pm, L_2^\pm\} &= [r_{12}^\epsilon, L_1^\pm] + [s_{12}^\epsilon, L_2^\pm] + \frac{1}{2}k_2 L_1^\pm - \frac{1}{2}k_1 L_2^\pm - \frac{1}{8}[U_{12}, \phi_1 - \phi_2] \\ \{L_1^+, L_2^-\} &= [r_{12}^-, L_1^+] + [s_{12}^-, L_2^-] + \frac{1}{2}k_2 L_1^+ - \frac{1}{2}k_1 L_2^- - \frac{1}{8}[U_{12}, \phi_1 - \phi_2] \\ \{L_1^-, L_2^+\} &= [r_{12}^+, L_1^-] + [s_{12}^+, L_2^+] + \frac{1}{2}k_2 L_1^- - \frac{1}{2}k_1 L_2^+ - \frac{1}{8}[U_{12}, \phi_1 - \phi_2] \\ \{L_1^\pm, \phi_2\} &= \frac{1}{2}[L_1^\pm - L_2^\pm, c_{12}] \\ \{\phi_1, \phi_2\} &= \frac{1}{2}[\phi_1 - \phi_2, c_{12}] \end{aligned}$$

Nous supposons de plus que k commute avec tous les autres quantités. U_{12} et c_{12} sont symétriques dans l'échange des deux espaces. r_{12} et s_{12} les relations

$$r_{12}^\epsilon = -s_{21}^{-\epsilon}, \quad r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon} = s_{12}^\epsilon - s_{12}^{-\epsilon}, \quad [r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon}, L_1 + L_2] = 0$$

Il est alors aisé de démontrer que les équations (4.74) et (4.75) peuvent se déduire des relations de compatibilité de ce modèle. De par le caractère simplifié du modèle dû à l'absence de dilaton, il est bon candidat pour l'étude de la structure algébrique lié à ces nouvelles équations de Yang-Baxter modifiées.

4.3.3 Comparaison avec les précédentes formulations et généralisation

Comme nous l'avons signalé plusieurs fois au cours de cet exposé, la gravité réduite à deux dimensions n'est pas un sujet récent. L'espoir qu'elle soit un bon terrain d'essai de la quantification de la gravité fait qu'une littérature abondante sur la structure symplectique de ce modèle est disponible. Nous citerons plus particulièrement les noms de Korotkin, Nicolai et Samtleben et leurs articles comme par exemple [21, 22, 24]. Nous allons donc comparé nos résultats avec les leurs et plus particulièrement ceux présentés dans [24].

La structure symplectique proposée dans [24] est celle que nous avons utilisé précédemment. La paire de Lax que sur laquelle repose l'article, fait intervenir des pôles mobiles et se rapproche en cela de celle de Belinski et Zakharov que nous avons décrit au paragraphe 2.2.1.

$$\hat{A}_x = \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_x - \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} P_t + Q_x \quad (4.76)$$

$$\hat{A}_t = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} P_x + \frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} P_t + Q_t \quad (4.77)$$

avec

$$\gamma = \rho^{-1} \left(w + \tilde{\rho} - \sqrt{(w + \tilde{\rho})^2 - \rho^2} \right) \quad (4.78)$$

où $\tilde{\rho} = b(z_-) - a(z_+)$. Remarquons tout de suite que ce pôle est directement relié, au facteur ρ^{-1} près, à celui de Belinski et Zakharov (2.37) et est par conséquent, égal au facteur B_i d'après (3.92). Pour faire le lien avec notre paire de Lax, il faut se rappeler que pour introduire la dépendance des pôles vis-à-vis des coordonnées, il nous suffit de conjuguer par la solution du vide. En toute rigueur, il faudrait se placer dans la représentation de niveau un pour effectuer les calculs. Dans la pratique nous nous contenterons d'appliquer directement la formule (3.92) en identifiant μ et λ . Ainsi pour passer d'une expression en λ à une formule avec les pôles γ , il nous suffira d'effectuer la substitution

$$\lambda \longrightarrow \frac{1 - \gamma(x, t)}{1 + \gamma(x, t)} \quad (4.79)$$

et réciproquement

$$\gamma(x, t) \longrightarrow \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad (4.80)$$

En appliquant cette dernière transformation sur les fonctions rationnelles intervenant dans (4.76), nous obtenons

$$\frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma^2} = \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^{-1}) \quad \text{et} \quad \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} = -\frac{1}{2} (\lambda - \lambda^{-1})$$

Nous retrouvons ainsi la partie sur l'algèbre de boucle de notre paire de Lax, ceci constituant une vérification non-triviale de l'équivalence entre les deux formulations.

Korotkin et Samtleben ont évalué les crochets de Poisson pour la paire sur la surface des contraintes. Ils obtiennent

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{A}_1(x), \hat{A}_2(y) \right\} &= \frac{1}{\rho(x)} \delta(x-y) ([\hat{r}_{12}, A_1(x)] + [\hat{s}_{12}, A_2(x)]) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho(x)} (\hat{s}_{12} + \hat{t}_{12}) - \frac{1}{\rho(y)} (\hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}) \right) \partial_x \delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.81)$$

où les matrices \hat{r}_{12} , \hat{s}_{12} et \hat{t}_{12} sont définies par

$$\hat{r}_{12} = -\frac{2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} c_{12} - \frac{2\gamma_2^2(1 - \gamma_1^2)}{(1 - \gamma_2^2)(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} d_{12} \quad (4.82)$$

$$\hat{s}_{12} = -\frac{2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} c_{12} - \frac{2\gamma_1^2(1 - \gamma_2^2)}{(1 - \gamma_1^2)(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} d_{12} \quad (4.83)$$

$$\hat{t}_{12} = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} c_{12} + \frac{2\gamma_1\gamma_2 \left((\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (1 - \gamma_1\gamma_2)^2 \right)}{(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)(\gamma_1 - \gamma_2)(1 - \gamma_1\gamma_2)} d_{12} \quad (4.84)$$

avec $\gamma_1 = \gamma(x, t, w)$ et $\gamma_2 = \gamma(y, t, w)$. La forme présentée ici est une réexpression de celle que l'on peut trouver dans [24] où nous avons introduit des notations plus proches de celles que nous avons utilisées. Quel est le lien avec les matrices r et s de (4.66) et (4.66)? En appliquant la transformation (4.80), il est aisé de démontrer que \hat{r}_{12} (respectivement \hat{s}_{12}) peut être identifiée à la partie sur l'algèbre de boucle de r_{12} (respectivement s_{12}). La comparaison du terme non-ultralocal entre les deux modèles est un peu plus délicat. Reformulons (4.81) en isolant la partie sur \hat{t}_{12}

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{A}_1(x), \hat{A}_2(y) \right\} &= \frac{1}{\rho(x)} \delta(x-y) ([\hat{r}_{12}, A_1(x)] + [\hat{s}_{12}, A_2(x)]) \\ &\quad + \rho(x)^{-2} (\partial_x \rho) \hat{t}_{12} \delta(x-y) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho(x)} (\hat{s}_{12} + \hat{t}_{12}) - \frac{1}{\rho(y)} (\hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}) \right) \partial_x \delta(x-y) \end{aligned} \quad (4.85)$$

le terme en \hat{t}_{12} est donc un terme ultralocal. Dans notre cas, l'introduction de l'algèbre de Virasoro a permis de le réabsorber dans les commutateurs.

Même si les deux techniques donnent des résultats présentant des points communs, la philosophie est différente. Dans [24], tous les calculs sont faits sur la surface des contraintes. Il est donc impossible de vérifier si les expressions des crochets de Poisson sont cohérentes. Ceci présente un désavantage de taille : aucune équation du type Yang-Baxter ne peut être obtenue. Et même si les termes provenant de la contraintes étaient réintroduit, nous ne retrouverions pas d'équations sous forme de pure c-nombre de par la dépendance en coordonnées des pôles. D'un autre côté, leur méthode semble donner des résultats intéressants dans les cas de la matrice de monodromie et permet de contourner les problèmes que nous avons et que nous exposerons dans le prochain paragraphe.

Nous avons souvent étendu les résultats et démonstrations de ce travail à des algèbres autres que celle associée à la gravité réduite à deux dimensions. La raison est que ce modèle n'est qu'un cas particulier des réductions dimensionnelles de gravités et supergravités de d à 2 dimensions. De par l'intérêt suscité par les modèles supersymétriques et de théorie des cordes

à basse énergie, beaucoup de travaux ont été menés dans ce domaine. Nous nous contenterons de citer un exemple particulier : la supergravité $N = 16$ en dimension $d = 2$. Cette théorie présente l'intérêt d'être l'une des théories des champs les plus symétriques connues à ce jour. Le modèle sigma non-linéaire associé est basé sur $E_{8(+8)}/SO(16)$. Pour être plus précis, ce dernier décrit uniquement le secteur scalaire de cette supergravité. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [23].

4.4 Matrice de monodromie

Le calcul des crochets de Poisson sur la matrice de transfert s'effectue d'une manière identique à celui présenté dans la section (4.1.1). Le résultat obtenu est le suivant

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(x, x_0), \Psi_2(y, y_0)\} = & -\Theta(y, x, y_0) \rho^{-1}(x) \Psi_2(y, x) r_{12}^\epsilon \Psi_1(x, x_0) \Psi_2(x, y_0) \\ & -\Theta(x, y, x_0) \rho^{-1}(y) \Psi_1(x, y) s_{12}^\epsilon \Psi_1(y, x_0) \Psi_2(y, y_0) \\ & +\Theta(y, x_0, y_0) \rho^{-1}(x_0) \Psi_1(x, x_0) \Psi_2(y, x_0) r_{12}^\epsilon \Psi_2(x_0, y_0) \\ & +\Theta(x, y_0, x_0) \rho^{-1}(y_0) \Psi_1(x, y_0) \Psi_2(y, y_0) s_{12}^\epsilon \Psi_1(y_0, x_0) \\ & -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Theta(x-z) \Theta(z-x_0) \Theta(y-z) \Theta(z-y_0) \\ & \rho^{-2}(z) \Psi_1(x, z) \Psi_2(y, z) [U_{12}, \Phi_1(z) - \Phi_2(z)] \Psi_1(z, x_0) \Psi_2(z, y_0) \end{aligned} \quad (4.86)$$

La cohérence de cette expression est assurée par les équations de Yang-Baxter modifiées et les relations (4.68) et (4.70) sur les matrices r et U . En particulier, (4.70) devient pour la matrice de transfert

$$\rho^{-1}(x) (r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon}) \Psi_1(x, y) \Psi_2(x, y) = \rho^{-1}(y) \Psi_1(x, y) \Psi_2(x, y) (r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon}) \quad (4.87)$$

La vérification de l'identité de Jacobi nécessite l'évaluation des crochets de Poisson entre $\Psi(x, y)$ et ρ . De manière générale, ce type de calcul pour les crochets de la matrice de transfert avec une quantité \mathcal{O} repose sur la résolution du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \partial_y \{\mathcal{O}(x), \Psi(y, z)\} &= \{\mathcal{O}(x), A_x(y)\} \Psi(y, z) - A_x(y) \{\mathcal{O}(x), \Psi(y, z)\} \\ \partial_z \{\mathcal{O}(x), \Psi(y, z)\} &= \Psi(y, z) \{\mathcal{O}(x), A_x(z)\} + \{\mathcal{O}(x), \Psi(y, z)\} A_x(z) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dans le cas présent, nous avons

$$\{A(x), \rho(y)\} = -\frac{1}{2} \delta(x-y) k$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$\{\rho(x), \Psi(y, z)\} = \frac{1}{2} \Theta(z-x) k \Psi(y, z) - \frac{1}{2} \Theta(y-x) k \Psi(y, z) \quad (4.89)$$

est solution du système (4.88) associé.

Comme nous l'avons souligné lors de la présentation des systèmes non-ultralocaux, ces derniers sont pathologiques pour le calcul des crochets de la matrice de monodromie. Lorsque nous faisons tendre x vers y (ou x_0 vers y_0), la relation n'obéit plus à l'identité de Jacobi. Si dans certains cas une régularisation est possible [37, 38], il semblerait que les modèles sigma non-linéaires soient dépourvus d'une telle prescription [40].

Pour surmonter cette difficulté, une des méthodes envisageables est d'avoir plus d'information sur le système et en particulier, connaître les conditions aux limites du problème. Par exemple, supposons qu'il existe une valeur x que nous noterons x_∞ telle que $\rho(x)$ diverge lorsque x tend vers x_∞ . Si nous supposons qu'il est possible de prendre la limite naïve de (4.86) pour x_0 et y_0 tendant vers x_∞ et que $\Psi(x, x_\infty)$ est un comportement correct, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(x, x_\infty), \Psi_2(y, x_\infty)\} &= -\Theta(y-x) \rho^{-1}(x) \Psi_2(y, x_\infty) \Psi_2^{-1}(x, x_\infty) r_{12}^\epsilon \Psi_1(x, x_\infty) \Psi_2(x, x_\infty) \\ &\quad -\Theta(x-y) \rho^{-1}(y) \Psi_1(x, x_\infty) \Psi_1^{-1}(y, x_\infty) s_{12}^\epsilon \Psi_1(y, x_\infty) \Psi_2(y, x_\infty) \\ &\quad -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Theta(x-z) \Theta(y-z) \rho^{-2}(z) \Psi_1(x, x_\infty) \Psi_2(y, x_\infty) \quad (4.90) \\ &\quad \Psi_1^{-1}(z, x_\infty) \Psi_2^{-1}(z, x_\infty) [U_{12}, \Phi_1(z) - \Phi_2(z)] \Psi_1(z, x_\infty) \Psi_2(z, x_\infty) \end{aligned}$$

Il est aisé de montrer que ces crochets sont bien définis. Remarquons que la limite de (4.87) nous impose une contrainte importante sur $\Psi(x, x_\infty)$. En effet, nous avons

$$(r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon}) (\rho^{-1}(x) \Psi_1(x, x_\infty) \Psi_2(x, x_\infty)) = 0$$

ce qui impose que $\rho^{-1}(x) \Psi_1(x, x_\infty) \Psi_2(x, x_\infty)$ soit dans le noyau de $r_{12}^\epsilon - r_{12}^{-\epsilon}$.

Biensûr, il semblerait intéressant de posséder un autre point particulier pour pouvoir faire tendre x et y dans (4.90) vers cette valeur et ainsi définir des crochets pour une matrice de monodromie. Il est naturel en particulier de regarder le cas limite $\rho = 0$. Malheureusement, il n'est plus possible de considérer la limite naïve comme dans le cas précédent. Cette impossibilité constitue la principale lacune de ce travail. Il sera nécessaire pour poursuivre ces travaux, de réussir à passer outre ce problème en ayant par exemple plus d'information sur la fonction d'onde pour pouvoir effectuer un calcul cohérent entre la matrice de transfert et le dilaton dans cette limite et ainsi espérer préserver l'identité de Jacobi.

4.5 Observables classiques

Dans l'optique de quantifier le système, il s'avère intéressant de regarder quelles sont les observables classique du système. Nous avons donné la définition de ces dernières au paragraphe 4.2.1 : ce sont des quantités invariantes sous les transformations de jauge, ce qui se traduit mathématiquement par des crochets de Poisson nuls avec les contraintes de première classe. Le but de cet section sera donc de présenter une méthode permettant de construire ces observables.

Nous aurons besoin des crochets des matrices de transfert avec les contraintes. Dans un premier temps, il est nécessaire d'évaluer les commutateurs entre les générateurs des transformations et la connexion. Le résultat de ces calculs nous donne

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), A_x(y)\} &= A_t(x) \partial_x \delta(x-y) - [A_x(x), A_t(x)] \delta(x-y) \\ &\quad - \rho^{-1}(x) [\Phi(x), P_t(x)] \delta(x-y) \quad (4.91) \end{aligned}$$

$$\{\mathcal{P}(x), A_x(y)\} = A_x(x) \partial_x \delta(x-y) \quad (4.92)$$

$$\{\Phi_1(x), A_{x2}(y)\} = [c_{12}, A_{x2}(x)] \delta(x-y) + \partial_x \delta(x-y) c_{12} \quad (4.93)$$

Remarquons que les deux premières identités sont conforme à ce nous nous attendions à obtenir. L'intégration par rapport à x de (4.91) nous redonne la condition de courbure nulle

qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps de A_x . Quant à (4.92), Nous retrouvons bien la translation suivant x .

Pour obtenir les crochets de Poisson pour la matrice de transfert, il nous suffit de résoudre un système d'équations différentielles du type (4.88). Il est alors facile de vérifier que les formules

$$\{\mathcal{H}(x), \Psi(y, z)\} = A_t(y)\Psi(y, z)\delta(x - y) - \Psi(y, z)A_t(z)\delta(x - z) \quad (4.94)$$

$$\{\mathcal{P}(x), \Psi(y, z)\} = A_x(y)\Psi(y, z)\delta(x - y) - \Psi(y, z)A_x(z)\delta(x - z) \quad (4.95)$$

$$\{\Phi_1(x), \Psi_2(y, z)\} = c_{12}\Psi_2(y, z)\delta(x - y) - \Psi_2(y, z)c_{12}\delta(x - z) \quad (4.96)$$

sont bien solution du système d'équations associé à chaque contrainte. Notons que (4.94) n'est valable que sur la surface des contraintes.

La partie la plus simple dans la construction d'observable concerne celle liée à la création de quantité invariante sous les transformations de jauge $SO(2)$. Considérons pour cela le champ ζ défini par

$$\partial_\mu \zeta + Q_\mu \zeta = 0 \quad (4.97)$$

Pour obtenir les crochets de Poisson de ζ avec Φ , nous nous ramenons encore une fois à la résolution d'une équation différentielle du même genre que celle décrit ci-dessus. Nous obtenons ainsi

$$\{\Phi_1(x), \zeta_2(y)\} = -c_{12}\zeta_2(y)\delta(x - y) \quad (4.98)$$

On démontre alors aisément que la quantité $\zeta^{-1}(y)\Psi(y, z)\zeta(z)$ est invariante de jauge. En effet

$$\begin{aligned} \{\Phi_1(x), \zeta_2^{-1}(y)\Psi_2(y, z)\zeta_2(z)\} &= (\zeta_2^{-1}(y)c_{12}\Psi_2(y, z)\zeta_2(z)\delta(x - y) \\ &\quad - \zeta_2^{-1}(y)\Psi_2(y, z)c_{12}\zeta_2(z)\delta(x - z)) \\ &\quad + \zeta_2^{-1}(y)c_{12}\Psi_2(y, z)\zeta_2(z)\delta(x - y) \\ &\quad + \zeta_2^{-1}(y)\Psi_2(y, z)c_{12}\zeta_2(z)\delta(x - z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La question de quantités invariantes sous \mathcal{H} et \mathcal{P} est beaucoup plus délicate. Comme dans le cas du calcul des crochets pour la matrice de monodromie, nous allons imposer un certain nombre de conditions aux limites. Mais les résultats seront cette fois-ci plus fructueux. L'idée est de considérer la matrice de monodromie entre deux points particuliers et habillée par deux matrices

$$M_0^{-1}(x_0)\Psi(x_0, x_\infty)M_\infty(x_\infty) \quad (4.99)$$

Le but étant que, dans les limites que nous avons choisi, les contributions des matrices M_0 et M_∞ viennent compenser les termes résiduelles dans (4.94) et (4.95). Soulignons que cette technique s'inspire de l'idée proposée dans [24].

Comme dans 4.4, nous considérerons tout d'abord le cas $\rho \rightarrow \infty$. Si nous gardons à l'esprit l'image de ρ comme coordonnée radiale, ce cas signifie tout simplement que nous nous plaçons à très grande distance de la zone qui nous intéresse. Il est usuel de considérer que dans cette limite asymptotique, nous retrouvons la métrique plate minkowskienne. En coordonnées cylindrique, cette dernière s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (4.100)$$

Pour obtenir cette métrique avec notre paramétrisation, nous devons poser

$$\begin{aligned}\Pi_\rho &= \Pi_{\hat{\sigma}} = 0, & \hat{\sigma} &= -\frac{1}{4} \ln \rho \\ P_x &= \rho^{-1} \sqrt{2} \sigma^z, & P_t &= Q_x = Q_t\end{aligned}\quad (4.101)$$

Ainsi la paire de Lax associée s'écrit

$$(A_f)_x = \rho^{-1} \left(\frac{1}{2} (E_+ - E_-) + \frac{1}{2} \sigma^z (\lambda + \lambda^{-1}) \right) \quad (4.102)$$

$$(A_f)_t = \rho^{-1} \left(\frac{1}{2} (E_+ + E_-) + \frac{1}{2} \sigma^z (\lambda - \lambda^{-1}) + \frac{k}{8} \right) \quad (4.103)$$

Remarquons que les composantes sont proportionnelles à ρ^{-1} . La fonction d'onde associée nous est donnée par

$$\Psi_f = h_- \left(\frac{2\rho}{\rho+1} \right)^{E_-} \left(\frac{1}{2} (\rho+1) \right)^{-E_+} \rho^{-\frac{k}{2}} h_-^{-1} \quad (4.104)$$

$$= h_+ \left(\frac{2\rho}{\rho+1} \right)^{-E_+} \left(\frac{1}{2} (\rho+1) \right)^{E_-} \rho^{\frac{k}{2}} h_+^{-1} \quad (4.105)$$

avec $h_\pm = \exp \left(\sigma^z \ln \left(\frac{1+\lambda^\pm}{1-\lambda^\pm} \right) \right)$.

Si nous imposons que la fonction d'onde $\Psi(x)$ tende asymptotiquement vers celle de la métrique minkowskienne $\Psi_f(x)$ lorsque $x \rightarrow x_\infty$ (où x_∞ est le point tel que $\rho(x) \rightarrow \infty$ pour $x \rightarrow x_\infty$) les crochets (4.94) et (4.95) deviennent

$$\{\mathcal{H}(x), \Psi(y, x_\infty)\} = A_t(y) \Psi(y, x_\infty) \delta(x-y) \quad (4.106)$$

$$\{\mathcal{P}(x), \Psi(y, x_\infty)\} = A_x(y) \Psi(y, x_\infty) \delta(x-y) \quad (4.107)$$

Continuons maintenant en regardant le cas $\rho = 0$. Nous supposons donc qu'il existe un point x_0 tel que $\rho(x_0) = 0$. Si nous utilisons encore une fois l'image de la symétrie cylindrique où ρ joue le rôle de distance à l'axe, nous sommes en train de regarder la physique au voisinage de ce dernier. Nous allons donc imposer que

$$\rho(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_{\hat{\sigma}}(x_0) = 0 \quad (4.108)$$

où ces conditions signifient que ρ peut être considéré comme une coordonnée spatiale et donc de traduire la notion de coordonnée radiale au voisinage de l'axe de symétrie. Mais cette limite n'est pas sans poser des difficultés. Si nous supposons que les quantités intervenant dans la connexion suivent une loi en puissance de ρ lorsque $\rho \rightarrow 0$ ce qui semble raisonnable physiquement, alors en se servant des équations du mouvement, on démontre aisément que P est proportionnelle à ρ^{-1} . Ainsi la connexion de Lax diverge lorsque $x \rightarrow x_0$. Nous ne pouvons donc pas construire d'observable directement à partir de $\Psi(x_0, x_\infty)$. Pour contourner cette difficulté, nous allons appliquer l'idée consistant à multiplier la matrice de monodromie par une matrice M_0 (cf. (4.99)). Nous choisirons de prendre pour M_0 la solution du vide décrite au paragraphe 2.4.2 où plus précisément une version intégrant le facteur conforme que nous indiquerons d'un V majuscule pour la différencier de celle définie précédemment

$$\begin{aligned}\Psi_V &= e^{\frac{1}{2} \hat{\sigma} k} \left(\frac{\rho + \int \Pi_{\hat{\sigma}} + b}{2\rho} \right)^{E_+} \left(\frac{\rho + \int \Pi_{\hat{\sigma}} + b}{b'} \right)^{E_-} \\ &= e^{\frac{1}{2} \hat{\sigma} k} \left(\frac{\rho - \int \Pi_{\hat{\sigma}} + c}{2\rho} \right)^{-E_-} \left(\frac{\rho - \int \Pi_{\hat{\sigma}} + c}{c'} \right)^{-E_+}\end{aligned}\quad (4.109)$$

Notons que pour être homogène avec les notations employées ici, nous avons réexprimer les variables $a(z_+)$ et $b(z_-)$ sous la forme

$$a(z_+) = \rho + \int \Pi_{\hat{\sigma}} \quad \text{et} \quad b(z_-) = \rho - \int \Pi_{\hat{\sigma}} \quad (4.110)$$

On vérifiera aisément que ces définitions sont correctes en montrant que chacune des combinaisons ne dépend que d'une seule variable du cône de lumière.

Considérons maintenant la quantité

$$\Psi_V^{-1}(x) \Psi(x, x_\infty) \quad (4.111)$$

L'équation vérifiée par cette dernière se déduit de celle pour $\Psi(x, x_\infty)$ et $\Psi_V(x)$. Elle prend la forme suivante

$$\partial_\mu (\Psi_V^{-1}(x) \Psi(x, x_\infty)) = \left(\Psi_V^{-1}(x) \tilde{A}_\mu(x) \Psi_V(x) \right) \Psi_V^{-1}(x) \Psi(x, x_\infty)$$

où \tilde{A}_μ sont les parties des composantes de la paire de Lax à valeur dans l'algèbre de boucle, c'est-à-dire où nous avons enlevé la partie sur Virasoro et l'extension centale. Nous en déduisons les crochets de Poisson avec \mathcal{H} et \mathcal{P}

$$\{\mathcal{H}(x), \Psi_V^{-1}(y) \Psi(y, x_\infty)\} = \Psi_V^{-1}(y) \tilde{A}_t(y) \Psi_V(y) \Psi(y, x_\infty) \delta(x - y) \quad (4.112)$$

$$\{\mathcal{P}(x), \Psi_V^{-1}(y) \Psi(y, x_\infty)\} = \Psi_V^{-1}(y) \tilde{A}_x(y) \Psi_V(y) \Psi(y, x_\infty) \delta(x - y) \quad (4.113)$$

Il nous faut maintenant évaluer $\Psi_V^{-1}(y) \tilde{A}_\mu(y) \Psi_V(y)$ dans la limite où y tend vers x_0 . Pour cela, nous allons passer dans la représentation de niveau un de l'algèbre. Nous aurons besoin de l'expression de la fonction d'onde du vide dans la limite $\rho \rightarrow 0$. En utilisant (4.109) et en renommant les constantes, il s'en suit que

$$\Psi_V \sim e^{\frac{1}{2}\hat{\sigma}k} \left(\frac{b}{2\rho} \right)^{E+} (b')^{-E-} \sim e^{\frac{1}{2}\hat{\sigma}k} \left(\frac{c}{2\rho} \right)^{-E-} (c')^{E+} \quad (4.114)$$

en ayant renommé les constantes b' et c' pour réabsorber les facteurs constants. Effectuons le calcul pour la composante de P_t sur T^x

$$\begin{aligned} \Psi_V^{-1} (P_t)_x T^x \lambda \Psi_V &= \mp \frac{(P_t)_x}{4\pi} \Psi_V^{-1} \left(\oint_{\mathcal{C}} d\mu \mu W_2(\mu) \right) \Psi_V \\ &= \mp \frac{(P_t)_x}{4\pi} \left(\rho \frac{c'}{c(c'-1)^2} W_2\left(\frac{1}{1-c'}\right) \oint_{\mathcal{C}} d\mu \frac{\mu^3}{(\mu^2-1)^2} + \mathcal{O}(\rho^2) \right) \\ &= (P_t)_x (0 + \mathcal{O}(\rho^2)) \end{aligned} \quad (4.115)$$

La justification de la deuxième ligne à la troisième provient du fait que le contour \mathcal{C} autour de 0 peut être choisi aussi petit que nous le souhaitons ce qui, compte tenu du fait que l'intégrant n'a pas de pôle en 0, implique que l'intégrale est égale à zéro. Nous obtenons ainsi que $\Psi_V^{-1} (P_t)_x T^x \lambda \Psi_V = \mathcal{O}(\rho)$ compte-tenu de l'argument que P_t est proportionnelle à ρ^{-1} . Des résultats identiques peuvent être obtenus pour les autres composantes de P . Ainsi la quantité $\Psi_V^{-1}(x_0) \tilde{A}_\mu(x_0) \Psi_V(x_0)$ est égale à zéro, impliquant que les membre de droite de (4.112) et (4.113) s'annulent pour $x \rightarrow x_0$.

Pour obtenir nos observables, il suffit de combiner (4.111) et (4.97). Ainsi la quantité $\tilde{\Psi}(x_0, x_\infty)$ définie par

$$\tilde{\Psi}(x_0, x_\infty) = \zeta^{-1}(x_0) \Psi_V^{-1}(x_0) \Psi(x_0, x_\infty) \zeta(x_\infty) \quad (4.116)$$

possède par construction des crochets de Poisson nuls avec les contraintes de notre système. La décomposition de cette expression en tant qu'élément d'un groupe infini donne une infinité d'opérateurs commutant avec les contraintes. A l'image des quantités conservées de la section 4.1.1, nous obtenons ainsi une infinité d'observables.

Il serait à priori nécessaire, pour être complet, de déterminer l'algèbre de Poisson associée à ces observables. Malheureusement comme nous pouvons le constater, ceci réclamerait de connaître les crochets de Poisson pour la matrice de monodromie. Or nous avons vu au chapitre précédent que nous n'avions pas pour l'instant d'expression des crochets de la matrice de tranfert dans la limite $x \rightarrow x_0$ qui soient consistante. L'espoir serait que lors du calcul avec $\tilde{\Psi}(x_0, x_\infty)$, la contribution des différents crochets entre les quantités $\Psi_V^{-1}(x_0)$ et $\Psi(x_0, x_\infty)$ viennent s'arranger dans la limite des points coïdents. Malheureusement, la difficulté de la tâche due à la forme de $\Psi_V^{-1}(x_0)$ nous empêche pour l'instant de continuer ans cette voie.

Pour terminer, nous souhaitons souligner un des regrets que nous avons à propos de cette méthode. Pour pouvoir étudier le comportement en $x = x_0$, nous avons été obligés de passer par une représentation de l'algèbre. Ceci nous à permis en particulier de donner un sens à une quantité telle que $W_2(\frac{1}{1-c'})$. Une interprétation ne faisant pas intervenir de représentation particulière serait préférable et constitue à ce titre un des futurs objectifs.

4.6 Conclusions et perspectives

Pour résumer, voici les points importants que nous avons décrit au cours de ce chapitre et de [18]. Nous avons exprimé les crochets de Poisson pour la connexion de Lax développée dans [16]. Nous avons montré que ces derniers pouvaient être mis sous une forme équivalente aux modèles non-ultralocaux développés dans [37, 38] avec en plus un terme provenant de l'invariance de jauge. Nous avons ainsi obtenue deux matrices r et s ne dépendant pas des coordonnées. Étonnamment, bien qu'il s'agisse d'un modèle non-ultralocal, l'introduction de l'extension centrale et de l'algèbre de Virasoro a permis de déduire des équations de Yang-Baxter modifiées ne faisant intervenir que de pure c-nombres. En requérant des conditions aux limites physiquement raisonnables, nous avons aussi réussi à engendrer une infinité d'observables.

Lorsque nous comparons nos travaux aux résultats déjà existants, nous devons garder un esprit critique sur nos résultats. D'un côté nous avons les équations de Yang-Baxter qui n'avaient jamais encore été obtenues jusqu'à présent et qui en plus, présentent des caractéristiques étonnantes. D'un autre coté, le problème de la matrice de monodromie reste ouvert ce qui nous interdit pour l'instant d'aller plus loin et en particulier nous empêche de quantifier le système. Néanmoins, le succès de la méthode sur les autres points nous incite à croire qu'il s'agit d'une limitation technique qui pourrait être résolue en sachant correctement effectuer un passage à la limite $x \rightarrow x_0$.

Une fois que ces problèmes auront été résolus, il sera alors possible d'envisager la quantification du système par les méthodes usuelles. Parmi les sujets connexes susceptibles de pouvoir être développés, le plus intéressant semble être celui d'une formulation self-duale de la théorie. Par théorie self-duale, nous entendons une paire de Lax permettant d'obtenir simultanément les équations du mouvement pour la métrique et la métrique duale. Pour obtenir une formulation intégrant tous les champs et permettant le découplage des coordonnées et des pôles, nous avons agrandi l'algèbre considérée passant ainsi de l'algèbre de boucle à l'algèbre affine avec l'algèbre de Virasoro. Pour arriver à construire cette formulation self-duale, l'idée serait de travailler avec une algèbre encore plus grande. Une des voies possibles semble être l'utilisation d'algèbres hyperboliques [41].

Annexe A

Les équations du mouvement

Le but de cette annexe est de donner la démonstration des équations du mouvement (1.3-1.5). Pour simplifier les notations, les coordonnées seront notées (x_0, x_1, x_2, x_3) où $x_0 \equiv t$ et $x_1 \equiv z$. Nous utiliserons aussi les indices i et j pour désigner les indices des coordonnées (x_2, x_3) . Le choix de la paramétrisation pour la métrique sera le suivant

$$ds^2 = f(x_0, x_1) \left(- (dx_0)^2 + (dx_1)^2 \right) + \rho S_{ij}(x_0, x_1) dx^i dx^j \quad (\text{A.1})$$

avec la matrice S normée à $\det(S) = 1$. Ainsi, les seuls éléments non-nuls de la métrique sont

$$\begin{aligned} g_{00} = -g_{11} = -f & & g^{00} = -g^{11} = -f^{-1} \\ g_{ij} = \rho S_{ij} & & g^{ij} = \rho^{-1} S_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

Le calcul des symboles de Christofel est aisé. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2} \partial_0 \log f \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \partial_1 \log f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} f^{-1} \partial_0 (\rho S_{ij}) \\ \Gamma_{ij}^1 &= -\frac{1}{2} f^{-1} \partial_1 (\rho S_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2} (\rho^{-1} (\partial_0 \rho S) S^{-1})_{ij} \\ \Gamma_{1j}^i &= \frac{1}{2} (\rho^{-1} (\partial_1 \rho S) S^{-1})_{ij} \end{aligned}$$

Les autres symboles étant nuls.

A partir de ces résultats, nous sommes en mesure d'évaluer le tenseur de Ricci. Cela peut être fait par exemple grâce à la formule

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\alpha$$

Il est assez facile de voir que les composantes R_{0i} et R_{1i} s'annulent. Le tenseur de Ricci se réduit par conséquent à deux blocs 2×2 . Commençons par considérer la partie sur les indices i et j

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} f^{-1} \left((\partial_0 (\rho \partial_0 S S^{-1}) - \partial_1 (\rho \partial_1 S S^{-1}) + (\partial_0 \partial_0 - \partial_1 \partial_1) \rho) S \right)_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Si on considère la trace R_i^i et en utilisant l'identité $\text{tr}(\partial S S^{-1}) = \partial \log |\det(S)|$, on en déduit que

$$(\partial_0 \partial_0 - \partial_1 \partial_1) \rho = 0 \quad (\text{A.3})$$

Le dilaton est donc une fonction harmonique. Ceci nous permet de réécrire les équations d'Einstein $R_{ij} = 0$ sous la forme

$$\partial_0 (\rho (\partial_0 S) S^{-1}) - \partial_1 (\rho (\partial_1 S) S^{-1}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Le calcul du deuxième bloc est un peu plus compliqué. Le résultat est le suivant

$$\begin{aligned} R_{00} = & \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_0 - \partial_1 \partial_1) \log |f| + \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 \log |\rho| - \frac{1}{4} \partial_0 \log |\rho| \cdot \partial_0 \log |f| \\ & - \frac{1}{4} \partial_1 \log |\rho| \cdot \partial_1 \log |f| - \frac{1}{4} \text{tr} (\partial_0 S \cdot \partial_0 S^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} R_{11} = & -\frac{1}{2} (\partial_0 \partial_0 - \partial_1 \partial_1) \log |f| + \frac{1}{2} \partial_1 \partial_1 \log |\rho| - \frac{1}{4} \partial_0 \log |\rho| \cdot \partial_0 \log |f| \\ & - \frac{1}{4} \partial_1 \log |\rho| \cdot \partial_1 \log |f| - \frac{1}{4} \text{tr} (\partial_1 S \cdot \partial_1 S^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} R_{01} = & \partial_0 \partial_1 \log |\rho| - \frac{1}{2} \partial_0 \log |\rho| \cdot \partial_1 \log |f| - \frac{1}{2} \partial_1 \log |\rho| \cdot \partial_0 \log |f| \\ & - \frac{1}{8} \text{tr} (\partial_0 S \cdot \partial_1 S^{-1}) - \frac{1}{8} \text{tr} (\partial_1 S \cdot \partial_0 S^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Pour obtenir les équations du mouvement sous la forme (1.10), nous allons poser

$$\log |f| = 2\hat{\sigma} - \frac{1}{2}\rho + \log(\partial_+ \rho \cdot \partial_- \rho) \quad (\text{A.8})$$

(en ayant introduit les variables du cône de lumière (1.6)). Avec cette définition et en utilisant (A.3), nous pouvons réécrire les combinaisons $R_{00} + R_{11} \pm R_{01}$ et en déduire les équations

$$\partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \hat{\sigma} = -\rho \frac{1}{8} \text{tr} (\partial_{\pm} S \cdot \partial_{\pm} S^{-1}) \quad (\text{A.9})$$

La combinaison $R_{00} - R_{11}$ nous donne une équation du second ordre pour $\hat{\sigma}$

$$\partial_+ \partial_- \hat{\sigma} = -\frac{1}{8} \text{tr} (S^{-1} \cdot \partial_+ S \cdot S^{-1} \cdot \partial_- S) \quad (\text{A.10})$$

On vérifie aisément la compatibilité de cette dernière avec (A.9).

Les équations que nous avons obtenues sont celles présentées dans le premier chapitre. Seul la métrique diffère par le facteur conforme. En définissant $\rho = a(z_+) + b(z_-)$ et utilisant la transformation conforme

$$z_+ \rightarrow a(z_+) \quad z_- \rightarrow b(z_-)$$

la métrique est alors bien celle définie en (1.2).

Annexe B

Résoudre une équation sur \mathcal{VG}

A plusieurs étapes de notre présentation, nous avons été amenés à résoudre des équations à valeur dans l'algèbre \mathcal{VG} , comme par exemple

$$J_+^* A_{\pm} = -\partial Y_{int,ext}^* - [A, Y_{int,ext}^*] \quad (\text{B.1})$$

ou encore

$$\{A_+, A_-\} = [A_+, r_{12}] + [A_-, s_{12}] \quad (\text{B.2})$$

Pour résoudre de telles équations, nous aurons besoin d'évaluer et de réexprimer un certain nombre de commutateurs intervenant dans ces calculs. Commençons par les identités associées aux matrices de Pauli définies par (2.66).

$$\begin{aligned} [\sigma^z, \sigma^+ - \sigma^-] &= 2(\sigma^+ + \sigma^-), \quad [\sigma^z, \sigma^+ + \sigma^-] = 2(\sigma^+ - \sigma^-), \\ [\sigma^+ - \sigma^-, \sigma^+ + \sigma^-] &= 2\sigma^z \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma^z \sigma^z) &= 2, \quad \text{tr}((\sigma^+ + \sigma^-)(\sigma^+ + \sigma^-)) = 2 \\ \text{tr}((\sigma^+ - \sigma^-)(\sigma^+ - \sigma^-)) &= -2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Tous les autres commutateurs et traces sont nuls. Les relations de commutations de l'algèbre \mathcal{VG} sont définies par (1.25), (2.67) et (2.68). Nous aurons souvent à traiter des éléments de l'algèbre \mathcal{G}_{aft} s'écrivant comme une somme infinie de termes

$$G = X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \lambda^n$$

où X est élément de l'algèbre $sl(2, \mathbb{R})$. Formellement, il est possible de sommer la série et nous sommes tentés d'écrire $G = Xf(\lambda)$. Les calculs sont en général beaucoup plus simples à effectuer sous cette dernière forme. Il est possible à partir des relations de commutation de l'algèbre, de déduire directement celles pour ces quantités

$$[X\lambda^n, Yf(\lambda)] = [X, Y]f(\lambda)\lambda^n + \frac{n}{4i\pi}k \text{tr}(XY) \oint f(\lambda) \lambda^{-n} d\lambda \quad (\text{B.5})$$

$$[E_{\pm}, Yf(\lambda)] = -\frac{1}{2}Y(1 - \lambda^{\pm 2})\lambda \partial_{\lambda} f \quad (\text{B.6})$$

où l'intégration de (B.5) s'effectue sur un contour autour de l'origine du plan complexe. Comme nous l'avons déjà souligné au cours de la section 2.5.3, cette écriture formelle doit être utilisée avec précaution et devra être interprétée après chaque calcul.

Intéressons-nous au premier exemple. Ici Y^* est uniquement sur \mathcal{G}_{aft} . Sur ce type de problème, nous nous concentrons tout d'abord sur la partie sur l'algèbre de boucle, ce qui revient à prendre temporairement une charge centrale nulle. De manière générale, nous pouvons écrire

$$Y^* = f_z(z_+, z_-, \lambda^2) \lambda \sigma_z + f_x(z_+, z_-, \lambda^2) \lambda (\sigma^+ + \sigma^-) + f_y(z_+, z_-, \lambda^2) (\sigma^+ - \sigma^-)$$

Evaluons les différents commutateurs avec les générateurs intervenant dans la connexion de Lax

$$\begin{aligned} [\sigma_z \lambda, Y^*] &= 2f_x(\lambda^2) \lambda^2 (\sigma^+ - \sigma^-) + 2f_y(\lambda^2) \lambda (\sigma^+ + \sigma^-) \\ [(\sigma^+ + \sigma^-) \lambda, Y^*] &= -2f_z(\lambda^2) \lambda^2 (\sigma^+ - \sigma^-) + 2f_y(\lambda^2) \lambda \sigma^z \\ [(\sigma^+ - \sigma^-) \lambda, Y^*] &= -2f_z(\lambda^2) \lambda^2 (\sigma^+ + \sigma^-) + 2f_x(\lambda^2) \lambda \sigma^z \\ [E_{\pm}, Y^*] &= -\frac{1}{2} (1 - \lambda^{\pm 2}) \lambda \partial_{\lambda} (f_x(\lambda^2) \lambda) (\sigma^+ + \sigma^-) \\ &\quad -\frac{1}{2} (1 - \lambda^{\pm 2}) \lambda \partial_{\lambda} (f_y(\lambda^2)) (\sigma^+ - \sigma^-) \\ &\quad -\frac{1}{2} (1 - \lambda^{\pm 2}) \lambda \partial_{\lambda} (f_z(\lambda^2) \lambda) \sigma^z \end{aligned}$$

Nous travaillerons avec la composante A_+ sachant qu'une vérification a posteriori devra être faite pour A_- . La projection sur σ^z de l'équation (B.1) nous donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho^{-1} (\partial_+ \rho) (1 - \lambda^2) \partial_{\lambda} (f_z(\lambda^2) \lambda) + \partial_+ (f_z(\lambda^2) \lambda) \\ -\Delta (\partial_+ N) (f_y(\lambda^2) + f_x(\lambda^2)) = \rho \Delta^2 (\partial_+ N) \end{aligned}$$

Une solution simple consiste à prendre

$$f_z = 0, \quad f_x(z_+, z_-, \lambda^2) = \rho \Delta \tilde{f}_x(\lambda^2), \quad f_y(z_+, z_-, \lambda^2) = \rho \Delta \tilde{f}_y(\lambda^2)$$

L'équation impose alors la relation

$$\tilde{f}_x(\lambda^2) + \tilde{f}_y(\lambda^2) = -1$$

La projection sur $\sigma^+ - \sigma^-$ nous permet d'obtenir la relation

$$\rho (\partial_+ \Delta) \left((1 + \lambda^2) - \tilde{f}_y(\lambda^2) (1 - \lambda^2) \right) = \Delta (\partial_+ \rho) \left(-\frac{1}{2} (\lambda - \lambda^3) \partial_{\lambda} \tilde{f}_y(\lambda^2) - 1 + \tilde{f}_y(\lambda^2) \right)$$

Du membre de gauche, nous en déduisons l'expression de \tilde{f}_y ainsi que celle de \tilde{f}_x

$$\tilde{f}_x(\lambda^2) = \frac{-2}{1 - \lambda^2} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_y(\lambda^2) = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}$$

On montrera aisément que le membre de droite de l'identité précédente est aussi nul. De même la projection sur $\sigma^+ + \sigma^-$ est aussi vérifiée. Les fractions intervenant dans ce calcul peuvent être interprétées de deux façons, comme une série de termes soit de degré positif soit de degré négatif. Nous avons donc deux solutions possibles

$$\begin{aligned} Y_+^* &= -2\rho \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{2n+1} + \rho \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) (1 + \lambda^2) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{2n} \\ Y_-^* &= 2\rho \Delta (\sigma^+ + \sigma^-) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(2n+1)} + \rho \Delta (\sigma^+ - \sigma^-) (1 + \lambda^{-2}) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-2n} \end{aligned}$$

Ces expressions mettent ainsi clairement en évidence l'appartenance de chacune de ces solutions à une sous-algèbre de Borel distincte. La dernière étape consiste à se placer dans \mathcal{G}_{aft} et non plus dans l'algèbre de boucle associée. En renommant \tilde{Y}_+^* et \tilde{Y}_-^* les solutions de la partie sur boucle obtenues auparavant, nous allons chercher des expressions de la forme

$$Y_{\pm}^* = f_{\pm}(z_+, z_-) \frac{k}{2} + \tilde{Y}_{\pm}^*$$

Un seul commutateur donne une contribution non-nulle sur la charge centrale

$$[(\sigma^+ + \sigma^-) \lambda, Y_-] = -2\rho \Delta k \quad (\text{B.7})$$

Nous obtenons ainsi les équations pour $f_{\pm}(z_+, z_-)$

$$\frac{1}{2}\rho\Delta^2\partial_+N = \frac{1}{2}\partial_+f_+ \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\rho\Delta^2\partial_+N = \frac{1}{2}\partial_+f_- + \rho\Delta^2\partial_+N$$

En utilisant la définition (1.18) de la variable duale N^* , nous en déduisons l'expression finale de nos solutions

$$Y_{\pm}^* = \pm N^* \frac{k}{2} + \tilde{Y}_{\pm}^*$$

La méthode de résolution pour le second exemple est identique à celle que nous venons de décrire. Seule la difficulté est plus élevée. Nous nous contenterons de donner les grandes lignes de la démarche. Commençons par déterminer U_{12} . Le seul terme de $\{A_1(x), A_2(y)\}$ faisant apparaître la contrainte Φ provient du crochet $\{P_{t1}(x), P_{t2}(x)\}$ dont la valeur est d'après (4.55)

$$\{P_{t1}(x), P_{t2}(y)\} = \rho^{-2}(x)\delta(x-y)[d_{12}, \Phi_2(x)]$$

En remarquant que $[d_{12}, \Phi_2(x)] = -[d_{12}, \Phi_2(x)]$, nous en déduisons aisément l'expression de U_{12}

$$U_{12} = d_{12}(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})$$

Déterminer les matrices r est une tâche plus ardue. Comme précédemment, nous commençons par regarder la partie sur l'algèbre de boucle et nous nous limiterons à l'étude de la partie ultralocale des crochets de Poisson sur la connexion de Lax. Nous allons donc résoudre l'équation

$$\{A_1(x), A_2(y)\}|_{\text{local, boucle}} = \rho^{-1}(x) ([r_1 2, A_1(x)] + [r_1 2, A_2(x)]) \delta(x-y) \quad (\text{B.8})$$

L'expression des crochets de Poisson étant long, nous n'écrirons pas son développement. Posons comme ansatz

$$r_{12} = f_r(\lambda_1, \lambda_2) c_{12} + g_r(\lambda_1, \lambda_2) d_{12} \quad \text{et} \quad s_{12} = f_s(\lambda_1, \lambda_2) c_{12} + g_s(\lambda_2, \lambda_1) d_{12} \quad (\text{B.9})$$

L'introduction de cette expression dans (B.8) et la comparaison avec le calcul brut du membre de gauche nous impose la forme suivante pour les fonctions

$$f_r(\lambda_1, \lambda_2) = f_s(\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (\text{B.10})$$

$$g_r(\lambda_1, \lambda_2) = -g_s(\lambda_2, \lambda_1) = g(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 \lambda_2^{-1} (1 - \lambda_2^2)^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad (\text{B.11})$$

Notons que ces fonctions vérifient un certain nombre de relations qui seront utiles lors de la démonstration de la validité de l'identité de Jacobi

$$f(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_1, \lambda_3) + f(\lambda_1, \lambda_3) f(\lambda_2, \lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_2, \lambda_3) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$g(\lambda_1, \lambda_3) g(\lambda_3, \lambda_2) + f(\lambda_2, \lambda_3) g(\lambda_1, \lambda_2) + f(\lambda_3, \lambda_1) g(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$g(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_3, \lambda_2) - f(\lambda_2, \lambda_3) g(\lambda_1, \lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_1, \lambda_3) = 0 \quad (\text{B.14})$$

En introduisant la fonction

$$u(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_1^{-1})(\lambda_2 - \lambda_2^{-1}) \quad (\text{B.15})$$

nous obtenons une autre série d'identités fort utiles

$$g(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_1, \lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_3) g(\lambda_3, \lambda_2) - f(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_2, \lambda_3) = u(\lambda_1, \lambda_3) \quad (\text{B.16})$$

$$u(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_2, \lambda_3) + u(\lambda_1, \lambda_3) g(\lambda_3, \lambda_2) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$u(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_2, \lambda_3) - u(\lambda_1, \lambda_3) f(\lambda_2, \lambda_3) = 0 \quad (\text{B.18})$$

Lorsque nous effectuons un calcul uniquement sur la partie algèbre de boucle, le choix de la convention est sans importance. Il devient par contre indispensable dès que nous introduisons la charge centrale. Dans le calcul de $\{A_1(x), A_2(y)\}$, les seuls termes faisant intervenir la charge centrale sont de la forme $k \otimes E_{\pm}$ et $E_{\pm} \otimes k$. Compte-tenu des relations de commutation de l'algèbre de Virasoro, les seules termes que nous pouvons ajouter à (B.9) sont donc aussi de cette forme. Remarquons que pour la partie ultralocale, nous ne pouvons déterminer que la partie $E_{\pm} \otimes k$ de r_{12} (et réciproquement pour s_{12}). En effet, nous avons $[k \otimes E_{\pm}, A_1(x)] = 0$. Il nous faut à la fois reproduire les termes de la forme kT en tenant compte de la contribution provenant des commutateurs du type $[g(\lambda_1, \lambda_2) d_{12}, A_1]$ ainsi que la partie non-ultralocale des crochets de Poisson. Cette dernière introduit un certain arbitraire à cause de la relation

$$(\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)) \partial_x \delta(x - y) = -(\rho^{-2}(x) \partial_x \rho(x)) \delta(x - y) \quad (\text{B.19})$$

Le miracle est que compte-tenu de ces contraintes, nous réussissions à déterminer la partie sur Virasoro tout en gardant une formulation compacte des crochets, identique à celle des modèles non-ultralocaux plus standards. Ceci est une preuve manifeste de la cohérence de nos calculs.

Pour terminer et pour faciliter la vérification de l'identité de Jacobi, donnons les formules développées pour les matrices r et s dans les deux conventions

– convention plus ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$) :

$$r_{12}^+ = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^{-2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n} c_{12} \quad (\text{B.20})$$

$$- \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n+1} d_{12} - \frac{1}{2}E_+ \otimes k - \frac{1}{4}k \otimes (E_+ + E_-)$$

$$s_{12}^+ = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^{-2}) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n} c_{12} \quad (\text{B.21})$$

$$- \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n+1} d_{12} - \frac{1}{2}k \otimes E_- - \frac{1}{4}(E_+ + E_-) \otimes k$$

– convention moins ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) :

$$r_{12}^- = -\frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2})(1 - \lambda_2^2) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n} c_{12} \quad (\text{B.22})$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n+1} d_{12} + \frac{1}{2}E_- \otimes k + \frac{1}{4}k \otimes (E_+ + E_-)$$

$$s_{12}^- = -\frac{1}{2}(1 - \lambda_1^{-2})(1 - \lambda_2^2) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n} c_{12} \quad (\text{B.23})$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})^2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2n+1} d_{12} + \frac{1}{2}k \otimes E_+ + \frac{1}{4}(E_+ + E_-) \otimes k$$

Annexe C

Quelques calculs avec les opérateurs de vertex

Si cette thèse a pour vocation de toucher un plus large public que celui constitué des personnes travaillant sur les systèmes intégrables ou les théories conformes, il est nécessaire d'introduire quelques techniques de calcul couramment utilisées dans les théories conformes. Cette annexe n'a pas l'intention d'être une introduction à ces dernières mais une aide pour reproduire les calculs faisant intervenir les opérateurs de vertex. Nous recommandons au lecteur intéressé la lecture de [32] ou [33] pour acquérir les notions de base dans ce domaine.

Commençons par introduire un certain nombre de formules utiles lors du développement de produits normaux.

$$A : e^B : = \langle AB \rangle : e^B : + : A e^B : \quad (C.1)$$

$$A^2 : e^B : = \langle AB \rangle^2 : e^B : + 2 \langle AB \rangle : A e^B : + : A^2 e^B : \quad (C.2)$$

$$\prod_i : e_i^A : = \left(\prod_{i < j} \langle A_i A_j \rangle \right) : e^{\sum_i A_i} : \quad (C.3)$$

Ces identités se démontrent aisément à partir théorème de Wick.

La relation (C.3) nous permet d'évaluer la valeur moyenne du produit d'opérateurs de vertex (3.48). En utilisant la contraction du champ bosonique $Z(\mu)$

$$\langle Z(\mu) Z(\nu) \rangle = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} \right) \quad \text{pour} \quad \left| \frac{\mu}{\nu} \right| > 1$$

nous en déduisons aisément que

$$\prod_q W_{u_q}(\mu_q) = \left(\prod_{p < q} \left(\frac{\mu_p - \mu_q}{\mu_p + \mu_q} \right)^{u_q u_p / 2} \right) : e^{i \sum_q u_q Z(\mu_q)} : \quad (C.4)$$

Nous avons énoncé dans la section 3.3 que $\pm i W_2(\mu)$ et $i \mu \frac{dZ(\mu)}{d\mu}$ engendraient une représentation de l'algèbre \mathcal{H}_{aft} . Nous allons maintenant prouver ce résultat. À partir de (3.42) nous pouvons écrire les générateurs de l'algèbre sous la forme

$$(\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2n} = \pm \frac{1}{4\pi} \oint_C d\mu W_2(\mu) \mu^{2n} \quad (C.5)$$

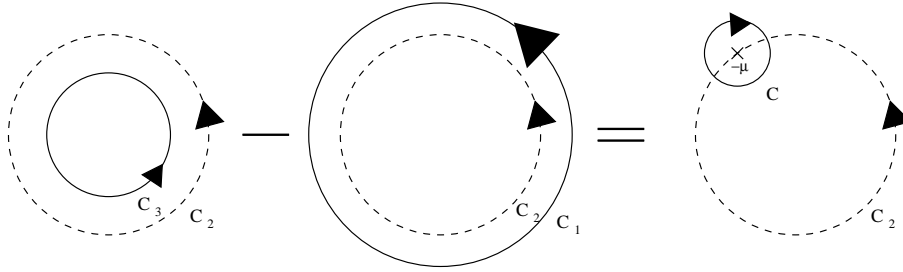
$$(\sigma_+ - \sigma_-) \lambda^{2n+1} = \pm \frac{1}{4\pi} \oint_C d\mu W_2(\mu) \mu^{2n-1} \quad (C.6)$$

$$\sigma^z \lambda^{(2n+1)} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\mu \frac{dZ(\mu)}{d\mu} \mu^{2n+1} \quad (\text{C.7})$$

où \mathcal{C} désigne un contour autour de 0. Vérifions qu'avec ces quantités, nous satisfaisons bien les relations de commutations de l'algèbre.

$$\begin{aligned} & [(\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2n+1}, (\sigma_+ - \sigma_-) \lambda^{2m}] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_3} d\nu W_2(\mu) W_2(\nu) \mu^{2n} \nu^{2m-1} \\ &\quad - \frac{1}{(4\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu W_2(\nu) W_2(\mu) \mu^{2n} \nu^{2m-1} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \left(\oint_{\mathcal{C}_3} d\nu - \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu \right) \left(\left(\frac{\nu - \mu}{\nu + \mu} \right)^2 \mu^{2n} \nu^{2m-1} : e^{2i(Z(\mu) + Z(\nu))} : \right) \end{aligned}$$

Les contours utilisés sont décrits sur le schéma ci-dessous.



Ils sont choisis de telle sorte que nous puissions utiliser (C.4). L'identité à laquelle correspond la figure tient au fait que seule la contribution du pôle en $-\mu$ va subsister lorsque nous allons effectuer la différence des deux intégrales, ce qui revient à effectuer une intégrale uniquement sur le contour \mathcal{C} . En évaluant cette dernière et en tenant compte du fait que $Z(-\mu) = -Z(\mu)$, nous en déduisons que

$$[(\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2n+1}, (\sigma_+ - \sigma_-) \lambda^{2m}] = [(\sigma_+ + \sigma_-), (\sigma_+ - \sigma_-)] \lambda^{2n+2m+1}$$

Par un raisonnement similaire, nous obtenons un autre commutateur

$$\begin{aligned} & [(\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2n+1}, (\sigma_+ + \sigma_-) \lambda^{2m+1}] \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}} d\nu \left(\left(\frac{\nu - \mu}{\nu + \mu} \right)^2 \mu^{2n} \nu^{2m-1} : e^{2i(Z(\mu) + Z(\nu))} : \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \left(4(2m+1) \mu^{2n+2m+1} + \mu^{2n+2m} (2i) \frac{dZ(\mu)}{d\mu} \right) \\ &= \frac{2n+1}{2} \delta_{(2m+1)+(2n+1),0} \text{tr} \left((\sigma_+ + \sigma_-)^2 \right) \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi clairement apparaître le terme d'extension centrale de l'algèbre qui est tel que $k = 1$ dans cette représentation. Nous ne détaillerons pas les autres commutateurs, les calculs étant similaires et ne présentant pas de difficultés particulières.

Dans la section 3.3, nous avons aussi exposé une représentation de l'algèbre de Virasoro. Nous allons prouver sa validité.

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{4(2i\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu \langle \partial_\mu Z \partial_\nu Z \rangle : \partial_\mu Z \partial_\nu Z : \mu^{2n+1} \nu^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{8(2i\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu (\langle \partial_\mu Z \partial_\nu Z \rangle)^2 \mu^{2n+1} \nu^{2m+1} \\ - (\text{termes avec les contours } \mathcal{C}_2 \text{ et } \mathcal{C}_3)$$

Le premier terme (avec sa contre-partie) va nous aider à reproduire le terme sur L_{n+m} . En tenant compte des deux pôles en μ et $-\mu$ (celui en 0 s'annulant par compensation des deux termes), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4(2i\pi)} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu \langle \partial_\mu Z \partial_\nu Z \rangle : \partial_\mu Z \partial_\nu Z : \mu^{2n+1} \nu^{2m+1} - (\text{terme avec les contours } \mathcal{C}_2 \text{ et } \mathcal{C}_3) \\ &= \frac{1}{4(2i\pi)} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu ((2m+1) : \partial_\mu Z \partial_\mu Z : + \mu : \partial_\mu Z \partial_\mu^2 Z :) \mu^{2(n+m)+1} \\ &= (n-m)L_{n+m} - \frac{n}{8} \delta_{n+m,0} \end{aligned}$$

Le second terme nous permet d'obtenir la partie extension centrale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8(2i\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_2} d\mu \oint_{\mathcal{C}_1} d\nu (\langle \partial_\mu Z \partial_\nu Z \rangle)^2 \mu^{2n+1} \nu^{2m+1} - (\text{terme avec les contours } \mathcal{C}_2 \text{ et } \mathcal{C}_3) \\ &= \frac{1}{12} n(n^2-1) \delta_{n+m,0} + \frac{n}{8} \delta_{n+m,0} \end{aligned}$$

Prouvant ainsi que la loi de commutation de Virasoro est vérifiée.

Le dernier point à regarder est celui concernant la loi de commutation entre les éléments de l'algèbre de Virasoro et ceux de \mathcal{H}_{aft} . Commençons par un résultat préliminaire sur l'action des L_n sur les opérateurs de vertex.

$$\begin{aligned} [L_n, W_u(\mu)] &= -\frac{1}{4(2i\pi)} \oint_{\mathcal{C}_>} d\nu : (\partial_\nu Z)^2 : W_u(\mu) \nu^{2n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4(2i\pi)} \oint_{\mathcal{C}_<} d\nu : (\partial_\nu Z)^2 : W_u(\mu) \nu^{2n+1} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{C}_>$ est un contour où les points sont de module plus grand que $|\mu|$ et réciproquement pour $\mathcal{C}_<$. En nous aidant de (C.2), nous obtenons l'identité

$$[L_n, W_u(\mu)] = \frac{\mu^{2n}}{2} \left(\frac{nu^2}{2} + \mu \partial_\mu \right) W_u(\mu) \quad (\text{C.8})$$

Grâce à cette relation, on démontrera aisément la validité du commutateur

$$[L_n, X\lambda^m] = -\frac{m}{2} X\lambda^{m+2n}$$

Elle nous permet aussi de calculer le résultat de la conjugaison d'un opérateurs de vertex par la fonction d'onde du vide. Pour cela, considérons le champ

$$\Phi_u(z) = \mu^{-u^2/2} W_u(\mu)$$

avec $z = \mu^2$. Ce champ est un champ primaire de poids conforme $\frac{u^2}{4}$, c'est à dire que sous une transformation conforme $z \rightarrow f(z)$, ce dernier se transforme de la façon suivante

$$\Phi_u(z) \rightarrow \left(\frac{df(z)}{dz} \right)^{u^2/4} \Phi_u(f(z))$$

Cette propriété résulte de la relation de commutation

$$[L_n, \Phi_u(z)] = z^n \left(\frac{u^2}{4}(n+1) + z \frac{d}{dz} \right) \Phi_u(z)$$

Connaissant la loi de transformation du champ $\Phi_u(z)$, nous pouvons en déduire celle associée aux opérateurs de vertex. En posant $F(\mu) = \sqrt{f(\mu)}$, nous obtenons

$$\mu^{-u^2/4} W_u(\mu) \longrightarrow (\partial_\mu F(\mu))^{u^2/4} (F(\mu))^{u^2/4} W_u(F(\mu))$$

Revenons maintenant au problème qui consiste à évaluer la conjugaison d'un opérateur de vertex $A^{-E_+} W_u(\mu) A^{E_+}$. Cette dernière peut être vue comme une transformation conforme associée à un difféomorphisme $\mu_+(A)$ qu'il nous faut déterminer. Au final nous aurons un résultat de la forme

$$A^{-E_+} W_u(\mu) A^{E_+} = A^{u^2/4} \left(\frac{\mu_+(A)}{\mu} \right)^{u^2/2} W_u(\mu_+(A)) \quad (C.9)$$

L'action de E_+ sur les éléments de \mathcal{H}_{aft} est équivalente à celle du champ de vecteur $\frac{1}{2}(1-\mu^2)\mu\partial_\mu$. Ceci peut s'observer directement sur la relation (2.71). Ainsi la quantité $\mu_+(A)$ n'est autre que courbe sur lequel intégrer ce champ de vecteur et est par conséquent définie par l'équation différentielle

$$A\partial_A \mu_+(A) = -\frac{1}{2}(\mu_+(A) - \mu_+^3(A))$$

Avec la condition initiale $\mu_+(1) = \mu$, la résolution de cette équation différentielle nous donne

$$\mu_+(A)^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + (1-\mu^2)A}$$

Un raisonnement similaire peut être conduit pour $B^{E_-} W_u(\mu) B^{-E_-}$. Nous obtenons dans ce cas

$$B^{E_-} W_u(\mu) B^{-E_-} = B^{u^2/4} \left(\frac{\mu_-(B)}{\mu} \right)^{-u^2/2} W_u(\mu_-(B)) \quad (C.10)$$

avec le difféomorphisme

$$\mu_-(B)^2 = 1 + (\mu^2 - 1)B$$

Grâce à (C.9) et (C.10), nous pouvons déduire la formule de conjugaison d'un opérateur de vertex par la solution du vide. Posons pour cela

$$A = a(z_+) + \frac{1}{2} = \frac{\rho}{B}$$

et avec l'identité

$$\mu_- \left(\frac{\rho}{a(z_+) + \frac{1}{2}} \middle| \mu_+ \left(a(z_+) + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\mu_+ \left(a(z_+) + \frac{1}{2} \right) \mu_- \left(b(z_-) + \frac{1}{2} \right)}{\mu}$$

nous obtenons le résultat

$$\Psi_v W_u(\mu) \Psi_v^{-1} = \rho^{u^2/2} \left(\frac{\mu_+ \left(a(z_+) + \frac{1}{2} \right)}{\mu_- \left(b(z_-) + \frac{1}{2} \right)} \right)^{u^2/2} W_u \left(\frac{\mu_+ \left(a(z_+) + \frac{1}{2} \right) \mu_- \left(b(z_-) + \frac{1}{2} \right)}{\mu} \right)$$

Pour terminer, donnons quelques formules utiles pour le calcul des fonctions τ . Pour cela, nous aurons besoin de la relation de commutation

$$[p_n, W_u(\mu)] = -u\mu^n W_u(\mu) \quad (\text{C.11})$$

En utilisant cette identité et (C.4), nous en déduisons les formules suivantes

$$\left\langle \prod_j W_{u_j}(\mu_j) \cdot p_{-1} \right\rangle = \prod_{i < j} \left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i + \mu_j} \right)^{u_i \cdot u_j / 2} \cdot \sum_j u_j \mu_j^{-1} \quad (\text{C.12})$$

$$\left\langle p_1 \cdot \prod_j W_{u_j}(\mu_j) \right\rangle = - \prod_{i < j} \left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i + \mu_j} \right)^{u_i \cdot u_j / 2} \cdot \sum_j u_j \mu_j \quad (\text{C.13})$$

$$\left\langle \prod_{j=1}^n (1 + iY_j W_2(\mu_j)) \right\rangle = \sum_{p=0}^n i^p \sum_{k_1 < \dots < k_p} Y_{k_1} \dots Y_{k_p} \prod_{k_i < k_j} \left(\frac{\mu_{k_i} - \mu_{k_j}}{\mu_{k_i} + \mu_{k_j}} \right)^2 \quad (\text{C.14})$$

Cette dernière formule peut se réexprimer à l'aide d'un déterminant. En effet, rappelons la formule du déterminant de Cauchy

$$\det \left(\frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_j} \right) = \prod_{i < j} \left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i + \mu_j} \right)^2$$

Ceci nous permet d'obtenir une formule compacte pour la valeur moyenne de produit de $1 + iY_j W_2(\mu_j)$

$$\left\langle \prod_{j=1}^n (1 + iY_j W_2(\mu_j)) \right\rangle = \det \left(\frac{2\mu_i Y_j}{\mu_i + \mu_j} \right)$$

Annexe D

Petit guide pour construire sa métrique

Cette annexe est un formulaire pratique pour que quiconque s'improvisant “constructeur de métrique du dimanche” soit capable d'engendrer une solution au problème de la gravité dans le vide réduite à deux dimensions. Nous présenterons l'ensemble des formules obtenues au chapitre 3 sous la forme de déterminant ainsi que quelques relations utiles lors de l'évaluation des composantes de la métrique.

Pour contruire une métrique, nous avons besoin de considérer deux ensembles de m couples paramètres $\{\mu_i, u_i\}$ et n couples $\{\mu_j, u_j\}$. Avec les choix de notations suivants pour la métrique et sa duale

$$ds^2 = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{2\hat{\sigma}} (dz^2 - d\rho^2) + G_{ab} dx^a dx^b \quad (\text{D.1})$$

$$ds_*^2 = \rho^{-\frac{1}{2}} e^{2\hat{\sigma}^*} (dz^2 - d\rho^2) + G_{ab}^* dx^a dx^b \quad (\text{D.2})$$

les différentes composantes peuvent alors s'exprimer sous la forme suivante

$$e^{2\hat{\sigma}} = |\langle \psi_v g \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.3})$$

$$e^{2\hat{\sigma}} G_{11} = \sqrt{\rho} |\langle \psi_v W g^* \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.4})$$

$$e^{2\hat{\sigma}} G_{12} = \sqrt{\rho} \operatorname{Im} \left(\langle \psi_v g^* \psi_v^{-1} \rangle \overline{\langle \psi_v W g^* \psi_v^{-1} \rangle} \right) \quad (\text{D.5})$$

$$e^{2\hat{\sigma}} G_{22} = \sqrt{\rho} |\langle \psi_v g^* \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.6})$$

et

$$e^{2\hat{\sigma}^*} = |\langle \psi_v g^* \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.7})$$

$$e^{2\hat{\sigma}^*} G_{11}^* = \sqrt{\rho} |\langle \psi_v W g \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.8})$$

$$e^{2\hat{\sigma}^*} G_{12}^* = \sqrt{\rho} \operatorname{Im} \left(\langle \psi_v g \psi_v^{-1} \rangle \overline{\langle \psi_v W g \psi_v^{-1} \rangle} \right) \quad (\text{D.9})$$

$$e^{2\hat{\sigma}^*} G_{22}^* = \sqrt{\rho} |\langle \psi_v g \psi_v^{-1} \rangle|^2 \quad (\text{D.10})$$

L'ensemble des grandeurs intervenant dans ces formules s'exprime à l'aide de la fonction $\tau(Y_j|w_j)$ définie par

$$\tau(Y_j|w_j) = \det(1 + iV) \quad \text{avec la matrice} \quad V_{ij} = \frac{2\mu_i Y_j}{\mu_i + \mu_j} \quad (\text{D.11})$$

Les valeurs moyennes sont alors données par

$$\langle \psi_v g \psi_v^{-1} \rangle = \Omega \tau(Y_j | w_j) \quad ; \quad \langle \psi_v g^* \psi_v^{-1} \rangle = \rho^{\frac{1}{4}} \Omega^* \tau(B_j Y_j | w_j) \quad (\text{D.12})$$

$$\langle \psi_v W g \psi_v^{-1} \rangle = \Omega_w \tau(B_j^2 Y_j | w_j) \quad ; \quad \langle \psi_v W g^* \psi_v^{-1} \rangle = \rho^{\frac{1}{4}} \Omega_w^* \tau(B_j^{-1} Y_j | w_j) \quad (\text{D.13})$$

avec les grandeurs suivantes

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\mu_i^2 - 1}{\mu_i^2 + 1} \quad ; \quad w_i^2 = \frac{(z_i - z) + \rho}{(z_i - z) - \rho} \\ X_i &= \rho \frac{z_i^2 - 1}{(z_i - z)^2 - \rho^2} \quad ; \quad B_{jk} = \frac{w_j - w_k}{w_j + w_k} \\ B_j &= \frac{1 - w_k}{1 + w_k} \quad ; \quad Y_j = y_j X_j \left(\prod_{k=1}^m B_{jk}^{u_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

et l'ensemble des facteurs Ω

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\prod_{k=1}^m X_k^{u_k^2/4} \right) \left(\prod_{k < l} B_{kl}^{u_k u_l / 2} \right) \quad ; \quad \Omega^* = \left(\prod_{k=1}^m B_k^{u_k / 2} \right) \Omega \\ \Omega_w &= \left(\prod_{k=1}^m B_k^{u_k} \right) \Omega \quad ; \quad \Omega_w^* = \left(\prod_{k=1}^m B_k^{-u_k / 2} \right) \Omega \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

A plusieurs reprises lors de l'étude des collisions d'ondes planes gravitationnelles, nous avons eu recours aux coordonnées ξ et w . Ces variables sont définies à partir des relations suivantes

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 - z + \rho)(1 - z - \rho)} + \sqrt{(1 + z + \rho)(1 + z - \rho)} \right) \quad (\text{D.16})$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 - z + \rho)(1 - z - \rho)} - \sqrt{(1 + z + \rho)(1 + z - \rho)} \right) \quad (\text{D.17})$$

Réciproquement, les variables ρ et z peuvent être évaluées en fonction de ξ et w . Nous obtenons les relations

$$\rho = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - w^2)} \quad (\text{D.18})$$

$$z = -w\xi \quad (\text{D.19})$$

Nous avons pu voir lors de la présentation des applications de cette méthode que certaines valeurs des pôles intervenaient régulièrement. Nous donnerons ici quelques unes des principales formules faisant appel aux pôles $\mu = 0$, $\mu = 1$ et $\mu = \infty$. Nous noterons X_μ et w_μ les grandeurs définies par (D.14) et associées à μ .

L'association des facteurs X_i liés à ces pôles et des coordonnées ξ et w nous permet d'exprimer facilement la métrique dans ces nouvelles coordonnées

$$\frac{(X_\infty X_0)^{\frac{1}{2}}}{\rho} (d\rho^2 - dz^2) = \text{const.} \left(\frac{d\xi^2}{1 - \xi^2} - \frac{dw^2}{1 - w^2} \right)$$

La constante est sans intérêt puisqu'elle peut être réabsorbée dans la définition du facteur conforme. Le produit de facteurs B_i et le terme B_{ij} se simplifient aussi grandement dans ce

cas particulier

$$\begin{aligned}\left(\frac{w_\infty - 1}{w_\infty + 1}\right) \left(\frac{1 - w_0}{1 + w_0}\right) &= \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \\ \left(\frac{w_\infty - 1}{w_\infty + 1}\right) \left(\frac{1 + w_0}{1 - w_0}\right) &= \frac{1 - w}{1 + w} \\ \left(\frac{w_\infty - w_0}{w_\infty + w_0}\right) &= \left(\frac{1 - \xi^2}{1 - w^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Il en va de même de certaines parties des termes Ω lorsque nous avons à considérer des pôles coïncidents

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} X_\mu \left(\frac{w_\mu - w_0}{w_\mu + w_0}\right)^{-1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} X_\mu \left(\frac{w_\infty - w_\mu}{w_\infty + w_\mu}\right)^{-1} = 4$$

La dernière formule que nous présenterons est associée au pôle en $\mu = 1$ et intervient, par exemple, dans le calcul de la métrique de Kasner

$$\left(\frac{w_\mu - 1}{w_\mu + 1}\right) \sim \frac{\rho}{2z} \quad \text{pour } \mu \rightarrow 1$$

Annexe E

Vérification de l'identité de Jacobi

Le but de cette annexe est de donner les grandes lignes de la démonstration permettant d'aboutir aux équations de Yang-Baxter modifiées (4.74) et (4.75). Pour cela, il nous faut développer l'identité de Jacobi. Nous écrirons cette dernière sous la forme

$$\begin{aligned} \{A_1(x), \{A_2(y), A_3(z)\}\} + \text{perm.} &= \rho^{-2}(x)\delta(x-y)\delta(y-z) ([A_1(x), A_{123}] + \text{perm.}) \\ &+ (\partial_x \rho^{-2}) \delta(x-y)\delta(y-z) (B_{123} + \text{perm.}) \quad (\text{E.1}) \\ &+ \rho^{-3}(x)\delta(x-y)\delta(y-z) ([\Phi_1(x), C_{123}] + \text{perm.}) \\ &+ \rho^{-2}(x)\delta(y-z)\partial_x\delta(x-y)D_{123} + \text{perm.} \end{aligned}$$

Les différents coefficients intervenant dans cette expression peuvent être formulés ainsi

$$A_{123} = [r_{12}^{\epsilon_1}, r_{23}^{\epsilon_2}] + [s_{23}^{\epsilon_2}, s_{31}^{\epsilon_3}] + [s_{31}^{\epsilon_3}, r_{12}^{\epsilon_1}] - \frac{1}{2}k_2 s_{31}^{\epsilon_3} - \frac{1}{2}k_3 r_{12}^{\epsilon_1} - \frac{1}{4}[U_{23}, c_{12}] \quad (\text{E.2})$$

$$B_{123} = [s_{23}^{\epsilon_2}, s_{31}^{\epsilon_3}] - [r_{23}^{\epsilon_2}, r_{12}^{\epsilon_1}] + \frac{1}{2}[r_{23}^{\epsilon_2}, s_{12}^{\epsilon_1}] - \frac{1}{2}[s_{23}^{\epsilon_2}, r_{31}^{\epsilon_3}] - \frac{1}{4}[U_{23}, c_{12}] \quad (\text{E.3})$$

$$C_{123} = \frac{1}{4}[r_{23}^{\epsilon_2}, U_{12}] + \frac{1}{4}[s_{23}^{\epsilon_2}, U_{31}] + \frac{1}{8}k_3 U_{12} - \frac{1}{8}k_2 U_{13} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} D_{123} &= [s_{23}^{\epsilon_2}, s_{31}^{\epsilon_3}] - [r_{23}^{\epsilon_2}, r_{12}^{\epsilon_1}] + [r_{23}^{\epsilon_2}, s_{12}^{\epsilon_1}] - [s_{23}^{\epsilon_2}, r_{31}^{\epsilon_3}] - \frac{1}{4}[U_{23}, c_{12}] \\ &+ \frac{1}{4}k_3 (s_{12}^{\epsilon_1} - r_{12}^{\epsilon_1}) - \frac{1}{4}k_2 (s_{31}^{\epsilon_3} - r_{31}^{\epsilon_3}) + \frac{1}{4}k_1 (s_{23}^{\epsilon_2} + r_{23}^{\epsilon_2}) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Avant de continuer, remarquons que les termes $\delta\partial\delta$ et $\delta\delta$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, on montre aisément que

$$\begin{aligned} &\rho^{-2}(x)\delta(y-z)\partial_x\delta(x-y) + \rho^{-2}(y)\delta(z-x)\partial_y\delta(y-z) \\ &+ \rho^{-2}(z)\delta(x-y)\partial_z\delta(z-x) + 2(\partial_x\rho^{-2})\delta(x-y)\delta(y-z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Nous utiliserons donc en lieu et place de (E.1), l'expression

$$\begin{aligned} \{A_1(x), \{A_2(y), A_3(z)\}\} + \text{perm.} &= \rho^{-2}(x)\delta(x-y)\delta(y-z) ([A_1(x), A_{123}] + \text{perm.}) \\ &+ (\partial_x\rho^{-2})\delta(x-y)\delta(y-z) (B_{123} + B_{231} + B_{312} - 2D_{123}) \\ &+ \rho^{-3}(x)\delta(x-y)\delta(y-z) ([\Phi_1(x), C_{123}] + \text{perm.}) \\ &+ \rho^{-2}(y)\delta(z-x)\partial_y\delta(y-z) (D_{231} - D_{123}) \quad (\text{E.7}) \\ &+ \rho^{-2}(z)\delta(x-y)\partial_z\delta(y-z) (D_{312} - D_{123}) \end{aligned}$$

Compte-tenu des formules, nous constatons que les facteurs faisant intervenir B et D dans (E.7) se réexpriment uniquement une fonction de A

$$B_{123} + B_{231} + B_{312} - 2D_{123} = A_{231} + A_{312} - A_{123} \quad (\text{E.8})$$

$$D_{123} - D_{231} = A_{123} - A_{231} \quad (\text{E.9})$$

$$D_{123} - D_{312} = A_{123} - A_{312} \quad (\text{E.10})$$

Pour prouver l'identité de Jacobi, il suffit donc d'étudier les coefficients A et C .

$$c_{12} = T_{\alpha 1} T_2^\alpha \quad \text{et} \quad d_{12} = T_{a1} T_2^a$$

Pour pouvoir calculer A_{123} et C_{123} , nous aurons besoin des relations suivantes

$$[c_{12}, c_{13}] = -[c_{12}, c_{23}] = [c_{13}, c_{23}] \quad (\text{E.11})$$

$$[d_{12}, c_{13}] = -[d_{12}, c_{23}] = [d_{13}, d_{23}] \quad (\text{E.12})$$

$$[c_{12}, d_{13}] = [d_{12}, d_{23}] = -[d_{13}, c_{23}] \quad (\text{E.13})$$

$$[d_{12}, d_{13}] = -[c_{12}, d_{23}] = [c_{13}, d_{23}] \quad (\text{E.14})$$

Le calcul que nous allons effectuer est très similaire à celui que nous avons explicité dans le cas du modèle de sh-Gordon. Commençons par le plus simple, c'est-à-dire celui pour C_{123} .

La matrice U n'ayant pas de composante sur l'algèbre de Virasoro, aucun élément de cette algèbre ne pourra apparaître dans C_{123} . Regardons ensuite la partie sur l'algèbre de boucle. Seuls les commutateurs peuvent engendrer de tels termes. La partie sur boucle vaut

$$\begin{aligned} & (u(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_2, \lambda_3) + g(\lambda_3, \lambda_2) u(\lambda_1, \lambda_3)) [c_{23}, d_{12}] \\ & + (u(\lambda_1, \lambda_2) g(\lambda_2, \lambda_3) - f(\lambda_2, \lambda_3) u(\lambda_1, \lambda_3)) [d_{23}, d_{12}] \end{aligned}$$

En utilisant les relations (B.17) et (B.18) obtenues dans l'annexe B, nous en déduisons que C_{123} n'a pas de composante sur l'algèbre de boucle. La dernière étape concerne la partie faisant intervenir l'extension centrale et des générateurs T . Nous avons deux composantes. Une de ces composantes est sur $d_{12}k_3$

$$\frac{1}{8}u(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{16}(\lambda_2^3 - \lambda_2) \partial_{\lambda_2} u(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{16}(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \lambda_2$$

Notons que pour ce calcul, nous nous sommes placés dans le cas où $\epsilon_2 = 1$. Le premier terme vient du $k_3 U_{12}$, le second du commutateur entre la partie Virasoro de r_{23} et U_{12} et la troisième du terme sur la charge centrale produit par la commutation de s_{23} et U_{13} . Une évaluation directe de cette expression nous indique que cette composante est nulle. Si nous avons choisi l'autre convention, nous aurions abouti au terme

$$\frac{1}{8}u(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{16}(\lambda_2 - \lambda_2^{-1}) \partial_{\lambda_2} u(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{1}{16}(\lambda_1 - \lambda_1^{-1})(\lambda_2 - \lambda_2^{-1})^2 \lambda_2^{-1}$$

dont nous pourrions aisément montrer qu'il est aussi égal à zéro. Avec un raisonnement similaire, nous déduisons que l'autre composante, sur $d_{13}k_2$, est aussi nulle, prouvant ainsi que $C_{123} = 0$. De la même manière nous montrerions que $C_{231} = C_{312} = 0$.

Le calcul à mener pour A_{123} et ses permutations circulaires étant rigoureusement équivalent, nous nous contenterons d'en donner les grandes lignes. La partie sur Virasoro est la plus simple. On vérifie directement que les différents termes se compensent. Pour la partie sur l'algèbre de boucle, il nous suffit d'utiliser les relations (B.12-B.14) et (B.16) pour montrer

qu'elle est égale à zéro. A cette occasion insistons encore une fois sur le fait que si nous nous étions servis de l'expression des crochets de la connexion sur la surface des contraintes, alors nous n'aurions pu utiliser l'identité (B.16) dont le membre de droite nous est fourni par le terme $[U_{23}, c_{12}]$ issu des crochets de la contrainte Φ . Pour terminer, il nous faut étudier les termes du type kTT . Nous devons faire attention à respecter la cohérence du choix des conventions que nous avons décrit au paragraphe 4.3.2 et qui est définie par $|\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3| = 1$. La compensation des différentes contributions ne peut avoir lieu que dans ce cas précis. A titre d'exemple, si nous avons choisi $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, le calcul de la composante sur les termes du types $k_2 d_{31}$ nous aurait conduit à

$$[r_{12}^+, r_{23}^+] \propto k_2 d_{31} \left(\sum_{n \geq 0} (2n+1) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^{2n+1} \right) + \text{autres termes}$$

et pour le reste des termes de A_{123}

$$I \left(\sum_{n \geq 0} (2n+1) \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{2n+1} \right) k_2 d_{31} + J \left(\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{2n+1} \right) k_2 d_{31} + \text{autres termes}$$

où I et J sont des polynômes en λ_1 et λ_3 . La compensation ne peut donc avoir lieu dans ce cas.

Pour résumer, nous avons donc démontrer que

$$A_{123} = A_{231} = A_{312} = 0 \quad \text{et} \quad C_{123} = C_{231} = C_{312} = 0$$

Compte-tenu des relations (E.8-E.10), nous pouvons en conclure que l'identité de Jacobi est satisfaite pour les crochets de Poisson de la paire de Lax.

Annexe F

Liste des publications

– New Lax pair for 2D dimensionally reduced gravity

En utilisant une paire de Lax basée sur l'algèbre de Kac-Moody $sl(2, \mathbb{R})$, nous résolvons les équations d'Einstein dans le vide réduites à deux dimensions. Nous obtenons des formules explicites sous forme de déterminants pour les coefficients de la métrique, sans calcul d'intégrale. Cette connexion de Lax permet aussi une nouvelle approche de l'algèbre de Poisson de la gravité réduite à deux dimensions. En particulier, nous montrons qu'elle conduit à des matrices r s'écrivant comme de purs c nombres et à des équations de Yang-Baxter modifiées. Nous expliquons comment construire des observables classiques dans ce cadre de travail.

Référence : D. Bernard et N. Regnault, J. Phys. A : Math. Gen. 34 (2001) 2343-2352.

– Poisson algebra of 2D dimensionally reduced gravity

En utilisant une paire de Lax basée sur l'algèbre de Kac-Moody $sl(2, \mathbb{R})$ affine déformée et l'algèbre de Virasoro, nous déduisons une formulation sous forme de matrices r pour les équations d'Einstein dans le vide réduites à deux dimensions. Alors que les crochets de Poisson fondamentaux sont non-ultralocaux, ils conduisent à des équations de Yang-baxter ne faisant intervenir que de purs c nombres. Nous décrivons aussi comment obtenir des observables classiques en imposant des conditions aux bords raisonnables.

Référence : D. Bernard et N. Regnault, JHEP 05 (2000) 017.

– Vertex operator solutions of 2D dimensionally reduced gravity

Nous appliquons des techniques algébriques et basées sur les opérateurs de vertex pour résoudre les équations d'Einstein dans le vide réduites à deux dimensions. Ceci conduit à des expressions explicites pour les coefficients de la métrique des solutions des équations du vide, sous forme de rapports de déterminants. Aucune intégration ne subsiste. Ces formules reposent sur l'identification de paires duales d'opérateurs de vertex correspondant aux métriques duales reliées par la symétrie de Kramer-Neugebauer.

Référence : D. Bernard et N. Regnault, Commun. Math. Phys. 210 (2000) 177.

Bibliographie

- [1] V.A. Belinskii et V.E. Zakharov, Sov. Phys. 48 (1978) 985.
- [2] A. Einstein et N.Rosen, J. Franklin Inst. 223 (1937) 43.
- [3] F.J. Ernst, Phys. Rev. 167 (1968) 1175.
- [4] F. Ernst, A. Garcia and I. Hauser, J. Math. Phys. 28 (1987) 2555 ; J. Math. Phys. 28 (1987) 2951 ; J. Math. Phys. 29 (1988) 681.
- [5] S. Chandrasekhar and B. Xanthopoulos, Proc. R. Soc. London Ser. A 408 (1986) 175.
- [6] P. Letelier, J. Math. Phys. 25 (1984) 2675 et J. Math. Phys. 26 (1985) 467.
- [7] P. Letelier and S. Oliveira, J. Math. Phys. 28 (1987) 165.
- [8] P. Letelier and S. Oliveira, Class. Quant. Grav. 15 (1998) 421.
- [9] Kramer ...
- [10] R. Geroch, J. Math. Phys. 13 (1972) 394.
- [11] J.B. Griffiths, *Colliding Plan Waves in General Relativity.*, Oxford University Press (1990).
- [12] C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler, *Gravitation* W.H Freeman and Company.
- [13] K.A. Khan et R. Penrose, Nature 229 (1971) 185.
- [14] Schwarzschild (1916)
- [15] Y. Nuktu and M. Halil, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 1379.
- [16] D. Bernard and B. Julia, Nucl. Phys. B547 (1999) 427.
- [17] D. Bernard et N. Regnault, Commun. Math. Phys. 210 (2000) 177.
- [18] D. Bernard and N. Regnault, JHEP 05 (2000) 017.
- [19] Papetrou ...
- [20] S. Coleman, J. Wess et B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2239.
- [21] H. Nicolai (1991)
- [22] H. Nicolai, D. Korotkin et H. Samtleben, Lectures given at NATO Advanced Study Institute on Quantum Fields and Quantum Space Time, Cargese, France, 22 Juillet-3 Août 1996
- [23] H. Nicolai et H. Samtleben, Nucl.Phys. B533 (1998) 210
- [24] D. Korotkin and H. Samtleben, Nucl. Phys. B527 (1998) 657.
- [25] L. Faddeev, Les Houches Session XXXIX (1982) 564.
- [26] B. Julia and H. Nicolai, Nucl. Phys. B482 (1996) 431.

- [27] B. Julia, *Infinite dimensional algebras in physics*, dans "John Hopkins workshop on current problems in particle physics : Unified theories and beyond", Johns Hopkins University, Baltimore (1981).
- [28] B. Julia and H. Nicolai, Nucl. Phys. B482 (1996) 431.
- [29] V.E. Zakharov et A.B. Shabat, Funct. Anal. Appl. 13 (1979) 166.
- [30] O. Babelon et D. Bernard, Resolution methods for integrable systems Part I Classical Theory, Notes de cours (1994).
- [31] O. Babelon et D. Bernard, Int. J. Mod. Phys. A8 (1993) 507.
- [32] P. Di Francesco, P. Mathieu et D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer.
- [33] V. Dotsenko, Theories conformes 1ère partie, Notes de cours.
- [34] Lepowsky et R. Wilson, Commun. Math. Phys. 62 (1978) 43.
- [35] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara et T. Miwa, Proc. Japan Acad. A 57 (1981) 3806 ; Physica D4 (1982) 343 ; Publ. RIMS Kyoto Univ. 18 (1982) 1077.
- [36] M. Jimbo et T. Miwa, Publ. RIMS Kyoto Univ. 19 (1983) 943.
- [37] J.M. Maillet, Nucl. Phys. B269 (1986) 54.
- [38] J.M. Maillet, Phys. Lett. B167 (1986) 401.
- [39] P.M. Dirac ???
- [40] M. Forger, M. Bordermann, J. Laartz et U. Schaper, Comm. Math. Phys. 152 (1993) 167
- [41] T. Damour, M. Hennaux, B. Julia et Hermann Nicolai, hep-th/0103094

Deuxième partie

Effet Hall quantique de spin à
grand N

Chapitre 5

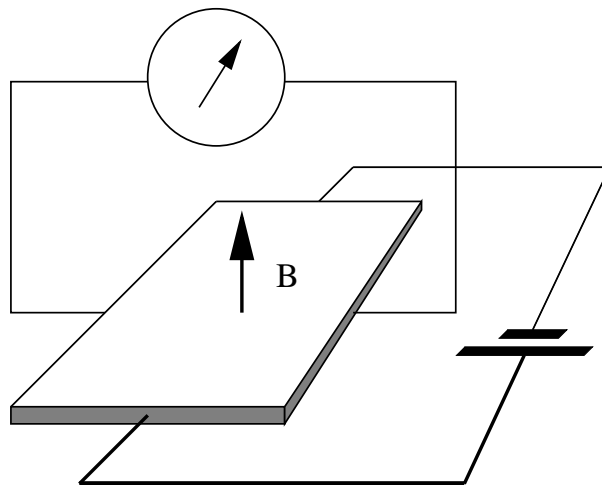
Effet Hall quantique de spin à grand N

Sommaire

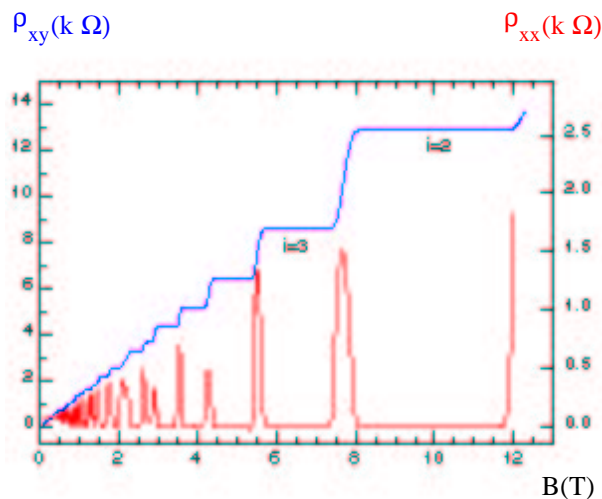
5.1	Introduction	109
5.2	Description du modèle	112
5.2.1	Le modèle de Chalker-Coddington	112
5.2.2	Limite continue	115
5.2.3	Généralisation	117
5.3	Action effective	120
5.3.1	Moyenner sur le désordre	120
5.3.2	Supermultiplets	121
5.3.3	Symétrie du système	123
5.4	Renormalisation	124
5.4.1	Calcul des fonctions β	124
5.4.2	Diagramme de phases	127
5.5	Séparation spin-charge	128
5.6	Approche par le modèle sigma et conclusions	129

5.1 Introduction

Soit un échantillon conducteur soumis à un champ magnétique fort perpendiculaire à ce dernier et à une différence de potentiel. L'effet Hall classique correspond à l'apparition d'une différence de potentiel dans la direction perpendiculaire à la tension appliquée. La résistivité transverse est alors proportionnelle au champ magnétique appliqué.



L'équivalent quantique de ce système est obtenu pour des gaz denses d'électrons confinés dans un plan à l'intérieur d'un échantillon mésoscopique (jonction d'hétérostructure avec deux types de semi-conducteur, par exemple). Pour être dans le régime quantique, il est nécessaire de se placer à basse température et à des valeurs élevées du champ magnétique, pour que les énergies mises en jeu soient grandes devant l'agitation thermique et les longueurs caractéristiques comme la longueur magnétique, soient petites. On observe alors [1] que la résistivité transverse ne suit plus une loi linéaire. Elle croît par plateaux, ces derniers étant répartis le long de la droite classique comme le montre le graphique ci-dessous donnant la résistivité transverse et longitudinale en fonction du champ magnétique.

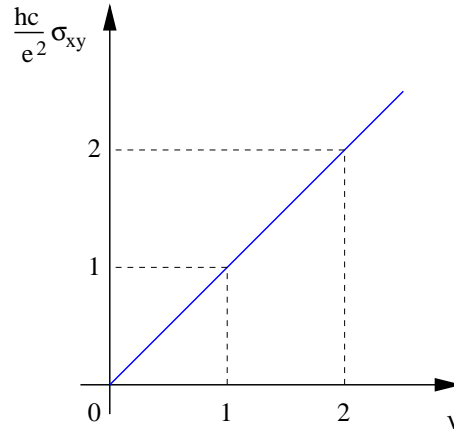


$T < 1K$

Le point remarquable provient du fait que les plateaux de la conductivité transverse sont quantifiés $\sigma_{xy} = i \frac{e^2}{h}$ et que ces valeurs sont universelles, c'est à dire indépendantes de l'échantillon considéré.

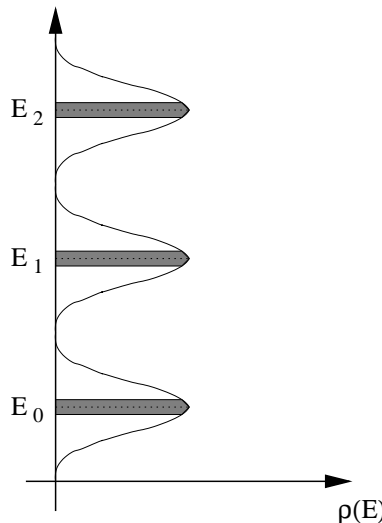
Pour expliquer pourquoi ce phénomène se produit, il faut faire appel aux niveaux de Landau et au désordre. Nous rappelons que l'énergie d'un électron soumis à un champ magnétique est quantifié $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$, où ω_c est la pulsation synchrotron (voir le chapitre 6 pour plus de détails), formant les niveaux de Landau. Ces niveaux sont grandement dégénérés (dégénérescence proportionnelle à la surface de l'échantillon) puisqu'il ne dépendent pas du

moment orbital. Dans le cas de l'effet Hall quantique entier qui nous intéresse ici, il est fait abstraction de l'interaction entre électrons. Pour autant, les seuls niveaux de Landau ne suffisent pas à expliquer les plateaux. En effet, le calcul simple de la fonction d'onde pour un électron soumis à un champ magnétique et un champ électrique constants perpendiculaires, aboutit à une levée partielle de la dégénérescence des niveaux de Landau et à des états délocalisés. Nous nous attendrions donc à voir une variation linéaire de la conductivité transverse en fonction du taux de remplissage $\nu = \frac{hc n}{eB}$ où n est la densité d'électrons.

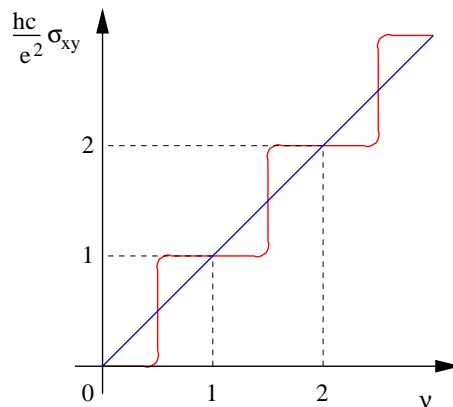


Pour reproduire les plateaux, il est nécessaire de considérer en plus le potentiel désordonné produit par les impuretés auquel sont soumis les électrons. Dans un premier temps, supposons que le champ électrique est nul. Le potentiel désordonné a pour effet de lever la dégénérescence et donc d'élargir les niveaux, formant ainsi des bandes. Les états sont localisés par le désordre autour des impuretés. La conductivité transverse est donc nulle. Appliquons à nouveau le champ électrique. Il apparaît alors en milieu de bande quelques états délocalisés. Ceci se voit assez clairement sur des modèles simples [2]. Le point important est que l'apport de ces états à la conductivité transverse compense exactement la perte provoquée par la localisation de la quasi totalité des états. Il est possible de montrer que la valeur du saut de σ_{xy} est un invariant topologique [3] : même si le désordre transforme des états délocalisés en états localisés, ceux qui subsistent sont modifiés de telle sorte qu'il y ait compensation.

Ainsi présenté, il est aisé de comprendre la présence de plateaux. Pour cela aidons nous du schéma suivant décrivant la densité d'état en fonction de l'énergie.



Tant que des états localisés sont ajoutés, la conductivité transverse reste inchangée. Dès que nous arrivons au milieu de la bande et que nous remplissons le niveau de Landau correspondant, la conductivité transverse change alors brutalement de valeur. Nous retrouvons par ce raisonnement les plateaux et les transitions de σ_{xy} (en rouge dans la figure ci-dessous).



Même si le phénomène est bien compris qualitativement, il n'existe pas à l'heure actuelle de modèle permettant de reproduire quantitativement la transition. En particulier, un des objectifs serait pour celui-ci de donner l'exposant critique pour la longueur de corrélation dans le système $\zeta(E) \propto (E - E_n)^{-\eta}$ où E_n correspond à l'énergie du milieu de la n -ième bande. Dans la littérature, on trouvera plus souvent la longueur de corrélation exprimée en fonction de B sous la forme $\zeta(B) \propto (B - B_c)^{-\eta}$, ce qui est équivalent à la formulation précédente si E_n est une fonction analytique de B . D'après des méthodes semi-analytiques ou numériques, l'exposant critique doit être proche de $\eta \simeq 7/3$.

Les systèmes que nous allons étudier par la suite s'inscrivent dans cette quête du Graal de la matière condensée théorique, qui permettra d'obtenir le bon exposant critique. Nous présenterons en particulier les résultats que nous avons obtenus [8] pour le modèle d'effet Hall quantique de spin basé sur l'algèbre $sp(2N)$. L'effet Hall quantique de spin est l'équivalent de l'effet Hall quantique pour la conductance de spin caractérisant la phase métal de spin [12]. Cette physique devrait être observée dans certains types de supraconducteurs tels que les cuprates [13] où il existe une séparation dans la phase supraconductrice entre le spin porté par des excitations fermioniques et la charge portée par des paires de Cooper.

Même si la physique de ces problèmes est intéressante, le système que nous utiliserons a surtout pour vocation d'être un modèle de transition, et non pas un modèle servant à expliquer le phénomène de l'effet Hall.

5.2 Description du modèle

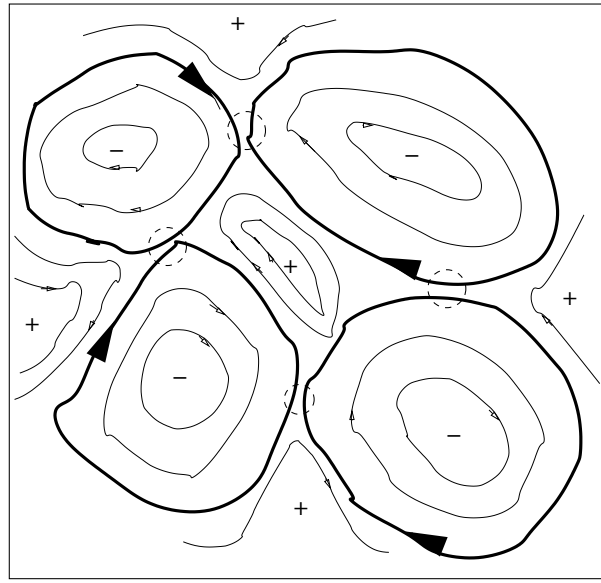
5.2.1 Le modèle de Chalker-Coddington

Le modèle de Chalker-Coddington [4] donne une image intuitive de la localisation d'Anderson en se référant à l'image semi-classique suivante. Considérons des électrons confinés dans un plan soumis à un fort champ magnétique B perpendiculaire à ce dernier. Compte-tenu de cette hypothèse, seul le niveau de Landau le plus bas sera occupé et les électrons auront tous la même polarisation, ce qui permet de négliger le spin dans ce problème. Le désordre est introduit par un potentiel V auquel sont soumis les électrons. Nous supposons

que le V varie lentement et satisfait la relation

$$|\vec{\nabla}V| \ll \frac{\hbar\omega_c}{l} \quad (5.1)$$

où $\omega_c = \frac{eB}{m}$ est la pulsation cyclotron et $l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ est la longueur d'onde magnétique. Cette condition revient à considérer les électrons comme des particules classiques effectuant un mouvement cyclotron dont le centre dérive lentement le long des équipotentiellles. D'un point de vue quantique, ceci revient à dire que la fonction d'onde sera nulle en dehors d'une fine bande autour des équipotentiellles $V = V_0$ où V_0 est le potentiel tel que les états d'énergie $\frac{1}{2}\hbar\omega_c + V_0$ satisfassent les conditions aux bords. Voici un schéma représentant ces équipotentiellles (en gras).



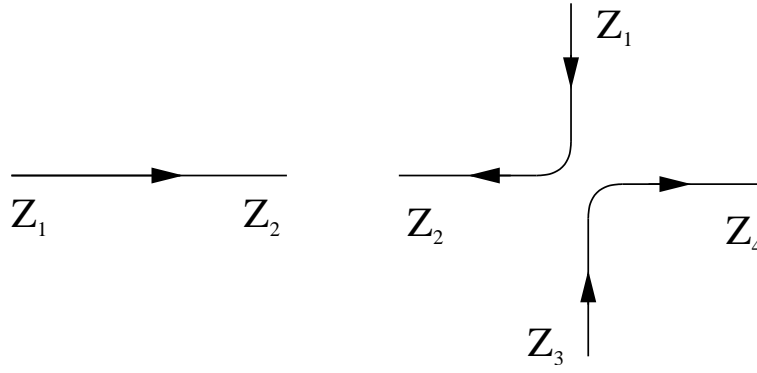
A priori, une équipotentielle est fermée. L'électron est donc localisé au voisinage de celle-ci. Lorsque deux équipotentiellles sont suffisamment proches (zones entourées sur le schéma), l'électron peut, par effet tunnel, passer de l'une à l'autre. Il est donc délocalisé. Nous retrouvons ainsi l'image de la transition Hall : la percolation quantique du système reproduit les transitions entre les plateaux Hall.

Au lieu de travailler avec la fonction d'onde Ψ , nous utiliserons la grandeur Z définie par

$$\arg(Z(s)) \sim \arg(\Psi(s, 0)) \quad \text{et} \quad |Z(s)|^2 \sim \int d\tau \Psi^* j_s \Psi \quad (5.2)$$

avec s la coordonnée curviligne associée à une équipotentielle et τ la coordonnée transverse associée. j_s est la composante de la densité de courant le long de l'équipotentielle. Notons que le choix du sens de parcours est tel que j_s (et donc $|Z(s)|^2$) soit positif.

A partir de cette description, Chalker et Coddington contruisent un modèle discret basé sur les deux briques suivantes



Le premier élément correspond à l'évolution de Z le long d'une équipotentielle. Comme il n'y a pas de courant sortant du ruban, la seule variation possible pour Z correspond à un changement de phase

$$Z_2 = e^{i\phi} Z_1 \quad (5.3)$$

La seconde brique est l'analogue de l'effet tunnel entre deux équipotentielles voisines. De manière générale nous pouvons écrire la relation

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La conservation du courant nous impose la contrainte sur les modules de Z

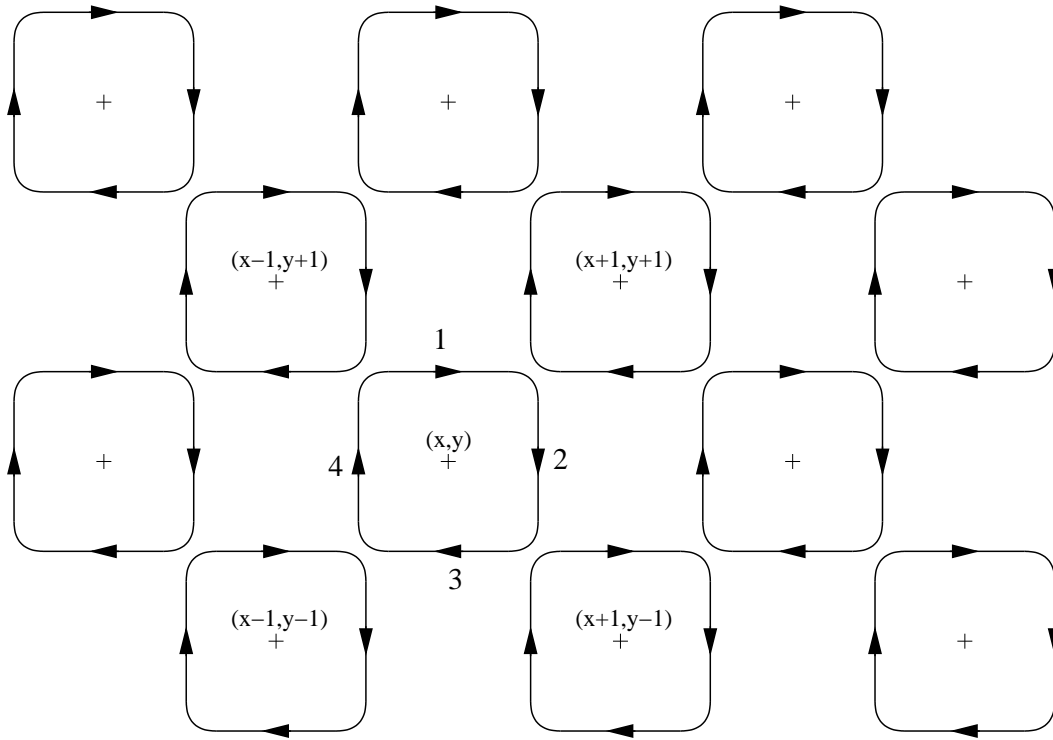
$$|Z_1|^2 + |Z_3|^2 = |Z_2|^2 + |Z_4|^2$$

La matrice M doit donc être unitaire et peut être mise sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Notons qu'a priori, des facteurs de phase pourraient apparaître dans les éléments de la matrice. Comme nous considérerons toujours des compositions des deux briques présentées ci-dessus, nous intégrerons ces facteurs dans (5.3). Remarquons aussi que l'effet tunnel est maximum pour $\beta = \beta_c = \frac{\pi}{4}$. Si nous voulons étudier la transition entre la localisation et la délocalisation des électrons, c'est autour de cette valeur qu'il faudra concentrer notre attention.

Grâce à ces morceaux de base, nous pouvons contruire le réseau carré suivant



Le centre d'une plaquette qui est l'équivalent d'une équipotentielle dans le problème initial, est repéré par les coordonnées (x, y) . Sur chaque plaquette, nous avons quatre composantes $Z_i(x, y)$ $i = 1, 2, 3$ et 4 situées au milieu de chaque lien.

Regardons comment nous pouvons retranscrire le désordre dans un tel modèle. Le déplacement de l'électron le long d'une portion d'équipotentielle de longueur aléatoire revient à considérer un déplacement sur une distance fixe mais la phase de la fonction d'onde aurait varié d'une quantité aléatoire. Ainsi ϕ dans (5.3) sera une variable aléatoire. Il en sera de même pour β qui conditionne l'effet tunnel entre deux équipotentielles dont l'écartement est aussi a priori aléatoire.

Ce modèle peut facilement être simulé numériquement. L'exposant critique qu'il est possible de tirer de ces simulations, est de $\eta \simeq 2.31$ [7] ce qui est proche de la valeur de $7/3$ annoncée dans l'introduction.

5.2.2 Limite continue

Intéressons-nous maintenant à la limite continue du modèle de Chalker-Coddington. La démarche que nous suivrons ici s'inspire de [5]. L'unité de temps que nous choisissons correspond au temps nécessaire au centre du mouvement cyclotron de l'électron pour aller du milieu d'un lien au milieu d'un autre lien voisin. Nous notons $Z_i(x, y, \tau)$ l'amplitude Z associée d'un électron arrivant sur le lien i de la plaquette centrée en (x, y) au bout d'un temps τ . Les amplitudes $Z_i(x, y, \tau + 1)$ et $Z_j(x', y', \tau)$ sont reliées par une matrice d'évolution

$$Z_i(x, y, \tau + 1) = \sum_{x', y', j} T_{x, x'; y, y'; i, j} Z_j(x', y', \tau) \quad (5.6)$$

Regardons ce qui se passe pour $Z_1(x, y, \tau + 1)$. L'amplitude reçoit une contribution du lien 4 de la plaquette située en (x, y) ou du lien 2 de la plaquette repérée par $(x - 1, y + 1)$. Nous

devons aussi tenir compte de la propagation sur le lien 1 en (x, y) . Nous obtenons ainsi

$$Z_1(x, y, \tau + 1) = e^{i\phi_1} (\cos \beta Z_2(x - 1, y + 1, \tau) + \sin \beta Z_4(x, y, \tau)) \quad (5.7)$$

Nous utiliserons les opérateurs t_{\pm}^x et t_{\pm}^y permettant de passer d'une plaquette à une de ces plus proches voisines. L'action sur Z est définie par

$$t_{\pm}^x Z_i(x, y, \tau) = Z_i(x \pm 1, y, \tau) \quad \text{et} \quad t_{\pm}^y Z_i(x, y, \tau) = Z_i(x, y \pm 1, \tau) \quad (5.8)$$

Ainsi nous pouvons réécrire (5.7) de la manière suivante

$$Z_1(x, y, \tau + 1) = e^{i\phi_1} (\cos \beta t_{-}^x t_{+}^y Z_2(x, y, \tau) + \sin \beta Z_4(x, y, \tau)) \quad (5.9)$$

Un calcul similaire peut être mené pour les autres amplitudes. Si nous introduisons les vecteurs

$$Z_{+} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_{-} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_4 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Il est alors possible d'écrire (5.6) sous la forme

$$\begin{pmatrix} Z_{+}(x, y, \tau + 1) \\ Z_{-}(x, y, \tau + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N_{+-} \\ N_{-+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{+}(x, y, \tau) \\ Z_{-}(x, y, \tau) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

avec

$$N_{+-} = \begin{pmatrix} \sin \beta e^{i\phi_1} t_{-}^x t_{+}^y & \cos \beta e^{i\phi_1} \\ \cos \beta e^{i\phi_3} & -\sin \beta e^{i\phi_3} t_{+}^x t_{-}^y \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

et

$$N_{-+} = \begin{pmatrix} \cos \beta e^{i\phi_2} & \sin \beta e^{i\phi_2} t_{+}^x t_{+}^y \\ \sin \beta e^{i\phi_4} t_{-}^x t_{-}^y & -\cos \beta e^{i\phi_4} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Nous voyons aisément que si nous considérons une matrice d'évolution entre τ et $\tau + 2$, les variables Z_{+} et Z_{-} sont alors découplées. Nous obtenons pour Z_{+}

$$Z_{+}(x, y, \tau + 2) = U Z_{+}(x, y, \tau) \quad \text{avec} \quad U = N_{+-} N_{-+} \quad (5.14)$$

et une relation équivalente pour Z_{-} . Dans la suite, nous considérerons uniquement la composante Z_{+} . Diagonalisons la matrice U en utilisant la transformée de Fourier. Posons pour cela

$$v = e^{i(p_x x + p_y y)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi

$$Uv = e^{-iV} \begin{pmatrix} B & C \\ -C^* & B^* \end{pmatrix} v$$

avec

$$B = \sin \beta \cos(p_y - A_y) e^{-i(p_x - A_x)} \quad (5.15)$$

$$C = \sin \beta \cos(p_y - A_y) e^{-i(p_x - A_x)} \quad (5.16)$$

$$A_x = \frac{1}{2}(\phi_4 - \phi_2) \quad (5.17)$$

$$A_y = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_3) \quad (5.18)$$

$$V = -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (5.19)$$

Nous avons supposé que le paramètre β et les phases ϕ_i étaient constants. Cette hypothèse est justifiée par les faibles variations spatiales du potentiel (5.1).

Pour calculer les valeurs propres de la matrice, il suffit de remarquer que $|B|^2 + |C|^2 = 1$ et

$$B + B^* = 2 \sin \beta \cos(p_x - A_x) \cos(p_y - A_y) = 2 \cos \xi \quad (5.20)$$

Les valeurs propres de U sont donc $e^{i(\xi-V)}$. (5.20) n'est autre que la relation de dispersion du modèle. Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, nous sommes intéressés par l'étude du système au voisinage de la transition. Posons pour cela $\beta = \beta_c + \frac{m}{2}$. Nous souhaitons passer à la limite continue, nous ferons donc un développement autour de $(p_x, p_y) = (0, 0)$. Nous supposons que les quantités m , A_x , A_y et ξ sont petites. La relation de dispersion devient

$$\xi^2 \sim m^2 + (p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2 \quad (5.21)$$

De même, nous obtenons pour U

$$U \sim 1 + \begin{pmatrix} -i(p_x - A_x) - iV & i(p_y - A_y) + m \\ i(p_y - A_y) - m & i(p_x - A_x) - iV \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Si nous notons cette matrice d'évolution $U = e^{i\tilde{H}}$, le développement de cette expression nous permet d'identifier \tilde{H} au terme d'ordre un de (5.22). En effectuant une rotation sur les composantes du système, nous en déduisons l'hamiltonien H

$$H = (p_x - A_x) \sigma_x + (p_y - A_y) \sigma_y + m\sigma_z + V \quad (5.23)$$

où σ_x , σ_y et σ_z sont les matrices de Pauli définies par

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Pour terminer le passage à la limite continue, il suffit d'effectuer l'identification

$$p_x \longrightarrow -i\partial_x \quad \text{et} \quad p_y \longrightarrow -i\partial_y$$

Nous retrouvons ainsi un hamiltonien de Dirac à deux composantes couplé au désordre. En effet, n'oublions pas que les ϕ et β sont aléatoires. Par conséquent la masse m reliée aux variations autour de la valeur critique du paramètre de l'effet tunnel est aussi aléatoire. Il en va de même pour V qui n'est autre que la phase de Aharonov-Bohm qu'acquiert l'électron lorsqu'il fait un tour le long d'une plaquette, ainsi que du potentiel vecteur \vec{A} provenant des variations des phases individuelles sur chaque lien.

5.2.3 Généralisation

Un certain nombre de généralisations du modèle de Chalker-Coddington existent. La plus évidente consiste à considérer N amplitudes par lien. La limite continue nous donne alors un hamiltonien de Dirac avec une symétrie $U(N)$ [15].

Une autre voie possible, que nous suivrons, est d'ajouter des degrés de liberté de spin comme le propose Kagalovsky et al. [16]. Reprenons l'hamiltonien (5.23) obtenu au paragraphe précédent. Le modèle utilisé est l'extension de (5.23) par un hamiltonien de Dirac à quatre composantes tel que

$$H = ((p_x - A_x) \sigma_x + (p_y - A_y) \sigma_y + m\sigma_z + V) \otimes 1 + 1 \otimes \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \quad (5.25)$$

où τ_i est une copie des matrices de Pauli définies par (5.24). $\vec{\alpha}$ est un potentiel de spin aléatoire. Posons $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $A = A_x - iA_y$ et $\bar{A} = A_x + iA_y$

$$H = \begin{pmatrix} V + m + \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} & -2i\partial_z + A \\ -2i\partial_{\bar{z}} + \bar{A} & V - m + \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Pour suivre [16], nous considérons maintenant le champ de jauge A comme un champ de jauge $SU(2)$ et non plus $U(1)$. Pour l'expression de l'hamiltonien correspondant, ceci revient à effectuer la substitution $A \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{\tau} = A_a \tau^a$.

Afin de faciliter l'étude de cette généralisation, nous allons reformuler ce modèle à l'aide d'une théorie des champs pour le champ fermionique Ψ . Les fonctions de Green à une particule sont déterminées à partir de l'intégrale fonctionnelle

$$Z^{-1} \int D\Psi D\Psi^* e^{-S} \quad (5.27)$$

où Z est la fonction de partition et S l'action donnée par

$$S = \int \frac{d^2x}{2\pi} \Psi^*(x) (H - \mathcal{E}) \Psi(x) \quad (5.28)$$

La fonction de Green retardée G_R et avancée G_A sont définies par

$$\begin{aligned} G_{R/A}(x, x'; \mathcal{E}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \left\langle x \left| \frac{1}{H - (\mathcal{E} + i\epsilon)} \right| x' \right\rangle \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} i \langle \Psi(x) \Psi^*(x') \rangle \end{aligned} \quad (5.29)$$

Posons

$$\Psi = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi^* = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_- & \Psi_- \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

où Ψ_+ est un fermion à deux composantes, ainsi que $\bar{\Psi}_-$ et $\bar{\Psi}_\pm$. Pour alléger les notations nous sous-entendons les indices fermioniques (en particulier ceux intervenant dans les sommations telles que $\sum_i \Psi_-^i \Psi_+^i = \Psi_- \Psi_+$). L'action (5.28) peut alors se réexprimer sous la forme

$$\begin{aligned} S = \int \frac{d^2x}{2\pi} & \left(\bar{\Psi}_- (\bar{\partial} + i\bar{A}) \Psi_+ + \bar{\Psi}_- (\partial + iA) \bar{\Psi}_+ + i\vec{\alpha} \cdot (\bar{\Psi}_- \vec{\tau} \bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_- \vec{\tau} \Psi_+) \right) \\ & + im (\Psi_- \bar{\Psi}_+ - \bar{\Psi}_- \Psi_+) - i(\mathcal{E} - V) \Phi_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \Psi_- \bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_- \Psi_+ \quad (5.32)$$

Ce modèle fut étudié dans le cas où le potentiel aléatoire V est supposé nul, dans l'article [10]. Lorsque $V = 0$, le système possède alors une symétrie discrète particule-trou \mathcal{C}

$$H = -\mathcal{C} H^T \mathcal{C}^{-1} \quad (5.33)$$

avec

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Un tel modèle appartient donc aux modèles de la classe C dans la classification d'Altland et Zirnbauer [17]. Cette symétrie implique que les valeurs propres de l'hamiltonien apparaissent par paire avec des signes opposés. Elle permet aussi de relier les fonctions de Green avancée et retardée

$$G_R(x, x'; \mathcal{E}) = -\mathcal{C}G_A^T(x, x'; -\mathcal{E})\mathcal{C}^{-1} \quad (5.35)$$

Dans l'article [8], nous nous sommes intéressés à généraliser ce modèle à une algèbre plus importante. Naïvement, nous serions tentés de considérer l'algèbre $su(2N)$. Or, pour que le système soit dans la même classe de symétrie que dans le cas $su(2)$, il faut utiliser l'algèbre $sp(2N)$. Nous rappelons que les générateurs de $sp(2N)$, notés τ^a avec $a = 1, \dots, N(2N+1)$, vérifient la relation

$$\tau^a \Sigma = \Sigma^T (\tau^a)^T \quad (5.36)$$

T désigne la transposition au sens usuel et Σ est la matrice définie par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

où 1_N est la matrice identité de dimension N . Remarquons que pour $N = 1$, de par l'identification $su(2) \simeq sp(2)$, nous retrouvons bien le modèle $su(2)$. La symétrie discrète \mathcal{C} devient

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Il est alors facile de vérifier que la relation (5.33) reste valable.

Nous verrons par la suite, que la procédure de renormalisation engendre un nouveau terme d'interaction $\vec{M} \cdot \vec{\mathcal{T}} = M_i(x, y) \mathcal{T}^i$. L'Hamiltonien que nous allons considérer sera donc de la forme

$$H = \begin{pmatrix} m + \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} + \vec{M} \cdot \vec{\mathcal{T}} & -2i\partial_z + A \\ -2i\partial_{\bar{z}} + \bar{A} & -\vec{M} \cdot \vec{\mathcal{T}} - m + \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

et l'action

$$S = \int \frac{d^2x}{2\pi} \left(\Psi_- (\bar{\partial} + i\bar{A}) \Psi_+ + \bar{\Psi}_- (\partial + iA) \bar{\Psi}_+ + i\vec{\alpha} \cdot (\Psi_- \vec{\tau} \bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_- \vec{\tau} \Psi_+) \right) \\ + im (\Psi_- \bar{\Psi}_+ - \bar{\Psi}_- \Psi_+) + im (\Psi_- M \bar{\Psi}_+ - \bar{\Psi}_- M \Psi_+) - i(\mathcal{E}) \Phi_{\mathcal{E}} \quad (5.40)$$

où Ψ_{\pm} et $\bar{\Psi}_{\pm}$ sont des fermions à $2N$ composantes.

Les générateurs \mathcal{T}^i vérifient l'identité

$$\mathcal{T}^i \Sigma = -\Sigma^T (\mathcal{T}^i)^T \quad (5.41)$$

Les \mathcal{T}^i sont le complément des générateurs de $sp(2N)$ dans $sl(2N)$. Ainsi \mathcal{T}^i , τ^a et 1 forment une base de $gl(2N)$. Pour la suite de cet exposé, nous supposons que les \mathcal{T}^i et τ^a sont orthonormés. Les normalisations choisies sont rappelées dans l'annexe A.

On vérifiera aisément que ce terme additionnel est permis par la symétrie particule-trou. Récemment, une classification plus fine que celle des matrices aléatoires de [17] a été proposée [11]. Dans cette classification des Hamiltonien de Dirac à deux dimensions et en présence du désordre, notre modèle constitue l'hamiltonien général de la classe 4^- .

La suite de ce chapitre sera dédié à l'étude de système. Nous profiterons en particulier de la présence du paramètre N pour faire tendre ce dernier vers l'infini dans le but de simplifier les diverses expressions mais aussi pour pouvoir appliquer la méthode du col dans le cas des modèles sigma décrivant les théories à basse énergie du système, à l'image des travaux menés dans le cas de modèles appartenant à la classe de symétrie D [19].

5.3 Action effective

5.3.1 Moyenner sur le désordre

Si nous disposions d'une expérience décrite par ce modèle, que mesurerions-nous ? A priori, il s'agirait de moyennes d'observables physiques. Soit un opérateur \mathcal{O} dont nous cherchons la valeur moyenne sur le vide $\langle \mathcal{O} \rangle$. L'expression de cette quantité nous est donnée par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Z^{-1} \int d\Psi d\Psi^* \mathcal{O} e^{-S(\Psi)} \quad (5.42)$$

avec

$$Z = \int d\Psi d\Psi^* e^{-S(\Psi)} \quad (5.43)$$

Mais il faut aussi tenir compte du désordre dont nous ne connaissons qu'une description statistique. Analytiquement ce calcul n'est pas sans poser de difficulté. Pour réussir, nous allons utiliser la technique supersymétrique présentée dans [14] et appliquée à ce type de problème dans [9]. Nous supposons que les différentes variables aléatoires suivent des distributions gaussiennes

$$P(m) = \exp \left(-\frac{N}{g_m} \int \frac{d^2x}{2\pi} m(x)^2 \right) \quad (5.44)$$

$$P(M) = \exp \left(-\frac{N}{g_M} \int \frac{d^2x}{2\pi} M_i(x) M^i(x) \right) \quad (5.45)$$

$$P(\vec{\alpha}) = \exp \left(-\frac{N}{g_\alpha} \int \frac{d^2x}{2\pi} \vec{\alpha}(x) \cdot \vec{\alpha}(x) \right) \quad (5.46)$$

$$P(A) = \exp \left(-\frac{N}{2g_A} \int \frac{d^2x}{2\pi} A_a(x) \overline{A}^a(x) \right) \quad (5.47)$$

Notre objectif est aussi de moyenner $\langle \mathcal{O} \rangle$ sur le désordre. Ce calcul est rendu difficile par la présence du facteur Z^{-1} dans (5.42). Pour pouvoir surmonter ce problème, l'idée proposée dans [9] est d'exprimer ce terme comme une intégrale de chemin pour des bosons

$$Z^{-1} = \int d\beta d\beta^* e^{-S(\Psi \rightarrow \beta)} \quad (5.48)$$

où $S(\Psi \rightarrow \beta)$ est l'équivalent de l'action S où nous avons remplacé les fermions par les fantômes bosoniques associés. Nous pouvons ainsi reformuler (5.42) de la manière suivante

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d\Psi d\Psi^* d\beta d\beta^* \mathcal{O} e^{-(S(\Psi) + S(\Psi \rightarrow \beta))} \quad (5.49)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer la moyenne sur le désordre. Une fois les intégrales gaussiennes effectuées, nous obtenons

$$\overline{\langle \mathcal{O} \rangle} = \int d\Psi d\Psi^* d\beta d\beta^* \mathcal{O} e^{-S_{\text{eff}}(\Psi, \beta)} \quad (5.50)$$

L'action effective est définie par

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{cft}} + S_{\text{int}} \quad (5.51)$$

S_{cft} étant l'action invariante conforme pour des fermions libres avec les fantômes bosoniques associés tels que la charge centrale de l'algèbre de Virasoro soit nulle

$$S_{\text{cft}} = 2 \int \frac{d^2x}{2\pi} (\Psi_- \partial_{\bar{z}} \Psi_+ + \beta_- \partial_{\bar{z}} \beta_+ + \bar{\Psi}_- \partial_z \bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_- \partial_z \bar{\Psi}_+) \quad (5.52)$$

et S_{int} étant le terme d'interaction venant perturber la théorie libre

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{2N} \int d^2x (g_m \mathcal{O}_m + g_A \mathcal{O}_A + g_\alpha \mathcal{O}_\alpha + g_M \mathcal{O}_M) \quad (5.53)$$

où les opérateurs du désordre nous sont donnés par

$$\mathcal{O}_m = \frac{1}{2N} (\Psi_- \bar{\Psi}_+ - \bar{\Psi}_- \Psi_+ + \beta_- \bar{\beta}_+ - \bar{\beta}_- \beta_+)^2 \quad (5.54)$$

$$\mathcal{O}_A = 4 (\Psi_- \sigma^\alpha \Psi_+ + \beta_- \sigma^\alpha \beta_+) \cdot (\bar{\Psi}_- \sigma^\alpha \bar{\Psi}_+ + \bar{\beta}_- \sigma^\alpha \bar{\beta}_+) \quad (5.55)$$

$$\mathcal{O}_\alpha = (\Psi_- \sigma^\gamma \bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_- \sigma^\gamma \Psi_+ + \beta_- \sigma^\gamma \bar{\beta}_+ + \bar{\beta}_- \sigma^\gamma \beta_+)^2 \quad (5.56)$$

$$\mathcal{O}_M = (\Psi_- \mathcal{T}^i \bar{\Psi}_+ - \bar{\Psi}_- \mathcal{T}^i \Psi_+ + \beta_- \mathcal{T}^i \bar{\beta}_+ - \bar{\beta}_- \mathcal{T}^i \beta_+)^2 \quad (5.57)$$

Notons que pour la convergence de la partie bosonique des intégrales fonctionnelles, les champs bosoniques doivent vérifier la relation

$$\beta_-^\dagger = \bar{\beta}_+ \quad \text{et} \quad \beta_+^\dagger = \bar{\beta}_- \quad (5.58)$$

où \dagger désigne la conjugaison complexe.

Grâce à cette astuce, nous avons ramené le problème de calcul de valeurs moyennes sur le désordre à celui d'un développement perturbatif par rapport aux constantes de couplages g_m , g_A , g_α et g_M de la théorie superconforme libre décrite par l'action (5.51). Pour pouvoir effectuer les calculs perturbatifs, nous aurons besoin des développements des produits d'opérateur pour les champs libres. Pour les champs à chiralité gauche, ceux-ci nous sont donnés par (cf par exemple [20])

$$\Psi_+(z) \Psi_-(z') \sim \frac{1}{z - z'} \quad ; \quad \Psi_-(z) \Psi_+(z') \sim \frac{1}{z - z'} \quad (5.59)$$

$$\beta_+(z) \beta_-(z') \sim \frac{1}{z - z'} \quad ; \quad \beta_-(z) \beta_+(z') \sim -\frac{1}{z - z'} \quad (5.60)$$

les autres produits étant nuls. Des relations similaires peuvent être écrites pour les champs à chiralité droite $\bar{\Psi}_\pm$ et $\bar{\beta}_\pm$ en substituant $z \rightarrow \bar{z}$.

5.3.2 Supermultiplets

Afin de simplifier les différentes expressions et de tirer profit des symétries du problème, nous allons utiliser une notation proche de celle employée dans [19]. Introduisons pour cela les supermultiplets

$$\phi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Sigma \Psi_-^T \\ \beta_+ \\ \Sigma \beta_-^T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_+ \\ \Sigma \bar{\Psi}_-^T \\ \bar{\beta}_+ \\ \Sigma \bar{\beta}_-^T \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Chacun de ces supermultiplets contient $4N$ fermions et $4N$ bosons. L'indice T correspond à la transposition au sens habituel (n'oublions pas que Ψ_- et β_- sont des vecteurs lignes).

$$\begin{aligned} \phi^t &= \begin{pmatrix} \Psi_-, & \Psi_+^T \Sigma^{-1}, & \beta_-, & -\beta_+^T \Sigma^{-1} \end{pmatrix} \\ \text{et } \bar{\phi}^t &= \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_-, & \bar{\Psi}_+^T \Sigma^{-1}, & -\bar{\beta}_-, & \bar{\beta}_+^T \Sigma^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\bar{\phi}^t \phi = -\phi^t \bar{\phi} \quad (5.63)$$

Les propriétés de $sp(2N)$ et de son complémentaire vis-à-vis de Σ impliquent les relations suivantes

$$\bar{\phi}^t \tau^a \phi = \phi^t \tau^a \bar{\phi} \quad \text{et} \quad \bar{\phi}^t \mathcal{T}^i \phi = -\phi^t \mathcal{T}^i \bar{\phi} \quad (5.64)$$

Notons que l'écriture τ^a (ou \mathcal{T}^i) dans la formule précédente doit être interprétée comme la matrice $8N \times 8N$

$$\begin{pmatrix} \tau^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^a \end{pmatrix}$$

Appliquons ces nouvelles notations aux diverses expressions que nous avons obtenues au cours du précédent paragraphe. Le terme d'action conforme (5.52) pour les fermions libres et les fantômes bosoniques se réécrit

$$S_{\text{cft}} = \int \frac{d^2 x}{\pi} (\phi^t \bar{\partial} \phi + \bar{\phi}^t \partial \bar{\phi}) \quad (5.65)$$

Les produits d'opérateurs pour les supermultiplets peuvent se déduire de (5.59-5.60) ou directement à partir l'action précédente. Nous obtenons ainsi

$$\phi(z) \phi^t(z') \sim \frac{1_{\text{susy}}}{z - z'} \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(z) \bar{\phi}^t(z') \sim \frac{1_{\text{susy}}}{\bar{z} - \bar{z}'} \quad (5.66)$$

où 1_{susy} désigne l'identité pour les matrices supersymétriques $8N \times 8N$.

$$\mathcal{O}_m = \frac{1}{2N} (\bar{\phi}^t \phi) (\bar{\phi}^t \phi) \quad (5.67)$$

$$\mathcal{O}_A = (\phi^t \tau^a \phi) (\bar{\phi}^t \tau_a \bar{\phi}) \quad (5.68)$$

$$\mathcal{O}_\alpha = (\bar{\phi}^t \tau^a \phi) (\bar{\phi}^t \tau_a \phi) \quad (5.69)$$

$$\mathcal{O}_M = (\bar{\phi}^t \mathcal{T}^i \phi) (\bar{\phi}^t \mathcal{T}_i \phi) \quad (5.70)$$

Afin de faciliter l'étude de la séparation spin-charge, réexprimons ces opérateurs en introduisant la supertrace STr . Soit une matrice supersymétrique A que nous décomposerons suivant les différents secteurs bosoniques et fermioniques

$$A = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FB} \\ A_{BF} & A_{BB} \end{pmatrix} \quad (5.71)$$

La supertrace de A notée $\text{STr}(A)$ est définie par

$$\text{STr}(A) = \text{tr}(A_{BB}) - \text{tr}(A_{FF}) \quad (5.72)$$

Avec cette définition, nous montrons aisément que la supertrace possède les mêmes propriétés que la trace pour les matrices standards. En particulier, elle est invariante par permutation circulaire et nous pouvons reformuler le produit scalaire de deux supermultiplets $\phi_1^t \phi_2$ comme $\text{STr}(\phi_2 \phi_1^t)$. Compte tenu de ces remarques et des relations (5.63) et (5.64), nous en déduisons les expressions suivantes pour les opérateurs marginaux

$$\mathcal{O}_m = \frac{1}{2N} \text{STr}(\phi \bar{\phi}^t \phi \bar{\phi}^t) = -\frac{1}{2N} \text{STr}(\phi \phi^t \bar{\phi} \bar{\phi}^t) \quad (5.73)$$

$$\mathcal{O}_A = \text{STr}(\bar{\phi} \phi^t \tau^a \phi \bar{\phi}^t \tau_a) \quad (5.74)$$

$$\mathcal{O}_\alpha = \text{STr}(\phi \bar{\phi}^t \tau^a \phi \bar{\phi}^t \tau_a) = \text{STr}(\bar{\phi} \bar{\phi}^t \tau^a \phi \phi^t \tau_a) \quad (5.75)$$

$$\mathcal{O}_M = \text{STr}(\phi \bar{\phi}^t \mathcal{T}^i \phi \bar{\phi}^t \mathcal{T}_i) = -\text{STr}(\bar{\phi} \bar{\phi}^t \mathcal{T}^i \phi \phi^t \mathcal{T}_i) \quad (5.76)$$

5.3.3 Symétrie du système

L'action conforme supersymétrique S_{cft} pour les champs libres possède une symétrie maximale correspondant à l'algèbre de courant $osp(4N|4N)_1$. Les courants conformes J^α générant cette symétrie correspondent à tous les bilinéaires qu'il est possible de créer à partir des fermions et des bosons associés, soit $J^\alpha = \{\Psi\Psi, \beta\Psi, \beta\beta\}$.

Lorsque les termes d'interaction sont ajoutés, cette symétrie est brisée. Il reste malgré tout une symétrie résiduelle $sp(2N)_0 \otimes osp(2|2)_{-2N}$. $sp(2N)$ et $osp(2|2)$ sont deux sous-algèbres naturelles de $osp(4N|4N)$. L'algèbre $sp(2N)$ est engendrée par les courants

$$J^a(z) = \phi^t(z) \tau^a \phi(z) \quad (5.77)$$

Le développement de produit d'opérateurs pour ces derniers nous donne

$$J^a(z) J^b(0) \sim \frac{1}{z} f^{ab}_c J^c(0) + \text{termes réguliers} \quad (5.78)$$

où f^{ab}_c est la constante de structure de l'algèbre de $sp(2N)$. La méthode pour arriver à ce résultat est présentée dans l'annexe A. Ces courants forment donc une représentation de l'algèbre affine $sp(2N)$ de niveau 0 que nous noterons $sp(2N)_0$. Remarquons que l'opérateur \mathcal{O}_A s'exprime comme une perturbation courant-courant de cette algèbre

$$\mathcal{O}_A = J^a J_a \quad (5.79)$$

L'algèbre $osp(2|2)$ est engendrée par les courants suivants

$$\begin{aligned} J &= \Psi_+ \Psi_- \quad ; \quad J_\pm = \Psi_\pm \Sigma \Psi_\pm \\ H &= \beta_+ \beta_- \quad ; \quad S_\pm = \Psi_\pm \beta_\mp \\ \hat{S}_\pm &= \Psi_\pm \Sigma \beta_\pm \end{aligned} \quad (5.80)$$

Les seuls produits d'opérateurs qui soient non-nuls, sont donnés par la liste ci-dessous

$$\begin{aligned} J(z) J(0) &\sim \frac{2N}{z^2} \quad ; \quad H(z) H(0) \sim -\frac{2N}{z^2} \\ J(z) J_\pm(0) &\sim \pm \frac{2}{z} J_\pm \quad ; \quad J_+(z) J_-(0) \sim -\frac{4N}{z^2} - \frac{4}{z} J \\ J(z) S_\pm(0) &\sim \pm \frac{1}{z} S_\pm \quad ; \quad J(z) \hat{S}_\pm(0) \sim \pm \frac{1}{z} \\ H(z) S_\pm(0) &\sim \pm \frac{1}{z} S_\pm \quad ; \quad H(z) \hat{S}_\mp(0) \sim \pm \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}
J_{\pm}(z)S_{\mp}(0) &\sim \frac{2}{z}\hat{S}_{\pm} \quad ; \quad J_{\pm}(z)\hat{S}_{\mp}(0) \sim -\frac{2}{z}S_{\pm} \\
S_{\pm}(z)\hat{S}_{\pm}(0) &\sim \pm\frac{1}{z}J_{\pm} \quad ; \quad S_{+}(z)S_{-}(0) \sim -\frac{2N}{z^2} + \frac{1}{z}(H - J) \\
\hat{S}_{+}(z)\hat{S}_{-}(0) &\sim \frac{2N}{z^2} + \frac{1}{z}(H + J)
\end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, ces courants engendrent une représentation de l'algèbre affine $osp(2|2)$ de niveau $-2N$ que nous noterons $osp(2|2)_{-2N}$. Une manière commode de regrouper ces courants consiste à les écrire dans une matrice

$$K = \begin{pmatrix} J & J_+ & S_+ & \hat{S}_+ \\ J_- & -J & -\hat{S}_- & -S_- \\ S_- & -\hat{S}_+ & H & 0 \\ \hat{S}_- & S_+ & 0 & -H \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

Cette matrice peut se réexprimer à l'aide des supermultiplets

$$K = \text{tr}_{gl(2N)} (\phi\phi^t) (z) \quad (5.83)$$

où $\text{tr}_{gl(2N)}$ correspond à la trace sur les indices de spin. Une relation utile avec cette formulation intervient lorsque nous conjuguons $\phi\phi^t$ par les éléments d'une base orthonormée $\{e^I\}$ de $gl(2N)$. On démontre aisément que

$$\sum_{I=1}^{2N} \text{tr}_{gl(2N)} (e^I \phi\phi^t e^I) = \text{tr}_{gl(2N)} (\phi\phi^t) \quad (5.84)$$

Ceci est vrai en particulier pour la base composée des τ^a , \mathcal{T}^i et $\frac{1}{2N}$. En particulier, ceci implique la relation suivante sur les opérateurs \mathcal{O}_m , \mathcal{O}_M et \mathcal{O}_α

$$\mathcal{O}_m + \mathcal{O}_M - \mathcal{O}_\alpha = -\text{STr} (K\bar{K}) \quad (5.85)$$

Il est aisé de vérifier que les générateurs de $osp(2|2)_{-2N}$ et de $sp(2N)_0$ commutent

$$[J^a, K] = 0$$

Pour montrer que le modèle a une symétrie $sp(2N)_0 \otimes osp(2|2)_{-2N}$, il suffit de prouver que les générateurs de cette algèbre commutent avec les opérateurs marginaux \mathcal{O}_m , \mathcal{O}_M , \mathcal{O}_α et \mathcal{O}_A . Dans le cas de \mathcal{O}_A , la preuve est directe puisque \mathcal{O}_A est proportionnel au Casimir de l'algèbre de $sp(2N)_0$. Pour les autres opérateurs, nous pouvons déjà nous appuyer sur (5.85), il nous suffit alors d'effectuer un calcul direct sur deux autres combinaisons pour compléter la démonstration, comme cela est proposé dans [10].

5.4 Renormalisation

5.4.1 Calcul des fonctions β

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au calcul perturbatif à une boucle. Ce dernier est grandement simplifié puisque les fonctions β sont dans ce cas déterminées à l'aide des coefficients du développement du produit d'opérateurs [18] (que nous nommerons désormais

par l'acronyme anglais OPE) pour les opérateurs marginaux perturbant la théorie libre. Plus précisément, écrivons ces OPE pour les opérateurs marginaux sous la forme

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z}) \mathcal{O}_j(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \sum_k C_{ij}^k \mathcal{O}_k + \text{termes réguliers} \quad (5.86)$$

La fonction β_k à une boucle associée à la constante de couplage g_k est définie par

$$\beta_k = l \frac{dg_k}{dl} \quad (5.87)$$

où l est l'échelle de longueur du système. Avec ces conventions, les fonctions β nous sont alors données par

$$\beta_k = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j} C_{ij}^k g_i g_j \quad (5.88)$$

Il nous faut donc déterminer les OPE pour l'algèbre des quatre opérateurs marginaux \mathcal{O}_m , \mathcal{O}_α , \mathcal{O}_A et \mathcal{O}_M . Ces calculs sont relativement longs et fastidieux. Nous donnons dans l'annexe A l'ensemble des grandeurs ainsi qu'une esquisse de la démarche à suivre en utilisant les supermultiplets. Nous présentons aussi dans l'annexe B une autre méthode basée sur un programme de calcul symbolique. Nous nous contenterons dans cette section de donner les résultats.

Dans un premier temps, nous avons les OPE des trois opérateurs \mathcal{O}_m , \mathcal{O}_α et \mathcal{O}_A qui sont déjà présents dans la théorie $su(2)$

$$\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_m(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \frac{2}{N} \mathcal{O}_m(0) + \text{t.r.} \quad (5.89)$$

$$\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left((2N+1) \mathcal{O}_m(0) - \frac{1}{N} \mathcal{O}_A(0) - \frac{1}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) \right) + \text{t.r.} \quad (5.90)$$

$$\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left(-4(2N+1) \mathcal{O}_m(0) - \frac{2}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) \right) + \text{t.r.} \quad (5.91)$$

$$\mathcal{O}_A(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) = -4 \frac{1}{z\bar{z}} (N+1) \mathcal{O}_A(0) + \text{t.r.} \quad (5.92)$$

$$\mathcal{O}_\alpha(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) = \frac{1}{z\bar{z}} (2\mathcal{O}_\alpha(0) - (N+1) \mathcal{O}_A(0)) + \text{t.r.} \quad (5.93)$$

$$\mathcal{O}_A(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) = -2 \frac{1}{z\bar{z}} N \mathcal{O}_\alpha(0) \quad (5.94)$$

$$\frac{1}{z\bar{z}} (-2N(2N+1) \mathcal{O}_m(0) - 2(N+1) \mathcal{O}_M(0)) + \text{t.r.}$$

Nous voyons clairement sur cette dernière expression, que pour $N > 1$, l'algèbre composée d'opérateurs marginaux \mathcal{O}_A , \mathcal{O}_m et \mathcal{O}_α ne ferment pas. Par contre si nous ajoutons l'opérateur \mathcal{O}_M qui vérifie les OPE suivantes

$$\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_M(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left(\frac{(2N+1)(N-1)}{N} \mathcal{O}_m(0) + \frac{1}{N} \mathcal{O}_M(0) \right) \quad (5.95)$$

$$\mathcal{O}_M(z, \bar{z}) \mathcal{O}_M(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left(-\frac{2(N+1)}{N} \mathcal{O}_M(0) - (N-1) \mathcal{O}_A(0) \right) \quad (5.96)$$

$$\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left(-\frac{(N-1)}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) - \frac{(N^2-1)}{N} \mathcal{O}_M(0) + \frac{B_\tau \tau}{2} \mathcal{O}_A(0) \right) \quad (5.97)$$

$$\mathcal{O}_M(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) = \frac{1}{z\bar{z}} \left(-2(N+1) \mathcal{O}_M(0) + \frac{2(N^2-1)}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) \right) \quad (5.98)$$

l'algèbre des quatre opérateurs est alors fermée à l'ordre d'une boucle, justifiant l'introduction *ad-hoc* de l'opérateur de masse généralisée \mathcal{O}_M dans la section 5.2.3. Nous verrons par la suite que cette propriété reste valable à n'importe quel ordre.

Grâce à cette algèbre et à (5.88), nous pouvons déduire les fonctions β à une boucle du modèle

$$\beta_m = \frac{2N+1}{N} \left(2g_A (g_m + g_\alpha) - g_m g_\alpha - \frac{N-1}{N} g_m g_M \right) - \frac{1}{N^2} g_m^2 \quad (5.99)$$

$$\beta_A = \frac{1}{2} (g_m + g_\alpha)^2 + \frac{1}{2N} (g_\alpha^2 - g_M^2) + \frac{2(N+1)}{N} g_A^2 + \frac{1}{N^2} g_\alpha (g_m - g_M) \quad (5.100)$$

$$\beta_\alpha = 2g_A (g_\alpha + g_M) + \frac{1}{N} g_\alpha (g_m - g_\alpha) + \frac{1}{N^2} (g_\alpha + 2g_A) (g_m - g_M) \quad (5.101)$$

$$\beta_M = \frac{2(N+1)}{N} g_A (g_\alpha + g_M) + \frac{1}{N} g_M (g_M - g_\alpha) + \frac{1}{N^2} g_M (g_M - g_m) \quad (5.102)$$

Regardons tout d'abord le cas $N = 1$. Les équations (5.99-5.101) deviennent alors

$$\beta_m = 6g_A (g_m + g_\alpha) - 3g_m g_\alpha - g_m^2 \quad (5.103)$$

$$\beta_A = g_\alpha^2 + g_\alpha g_m + 4g_A^2 \quad (5.104)$$

$$\beta_\alpha = 2g_A g_\alpha - g_\alpha^2 + g_m (g_\alpha + 2g_A) \quad (5.105)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats présentés dans [10] pour $su(2)$, moyennant le changement de normalisation des constantes de couplages $g_A \rightarrow \frac{1}{2}g_A$, $g_\alpha \rightarrow 2g_\alpha$ et $g_m \rightarrow 2g_m$.

Comme nous l'avons déjà souligné, l'intérêt de cette généralisation à $sp(2N)$ est de pouvoir faire une étude à N grand. Si nous faisons tendre N vers l'infini dans (5.99-5.102), les fonctions β se simplifient grandement

$$\beta_m = 4g_A (g_m + g_\alpha) - g_m (g_M + g_\alpha) \quad (5.106)$$

$$\beta_A = \frac{1}{2} (g_m + g_\alpha)^2 + 2g_A^2 \quad (5.107)$$

$$\beta_\alpha = 2g_A (g_\alpha + g_M) \quad (5.108)$$

$$\beta_M = 2g_A (g_\alpha + g_M) \quad (5.109)$$

Notons que cette limite n'est valable que si les constantes de couplages vérifient $g_i \ll N$.

Bien que nous ne donnerons aucun détail ici, signalons qu'un calcul à deux boucles par les deux méthodes directes proposées en annexe a été effectué et vient confirmer les conclusions que nous tirerons par la suite des expressions à une boucle.

Nous avons aussi appliqué la technique proposée dans [21] pour déduire les fonctions β à tout ordre. Nous nous contenterons de donner le résultat dans la limite $N \rightarrow \infty$, le lecteur intéressé pourra consulter [8] pour plus de plus amples précisions.

$$\beta_m = 4g_A (g_m + g_\alpha) - g_m (g_M + g_\alpha) - \frac{(g_\alpha + g_M) (g_\alpha - g_M)^2}{(g_\alpha - g_M - 2)} \quad (5.110)$$

$$\beta_A = \frac{1}{2} (g_m + g_\alpha)^2 + 2g_A^2 \quad (5.111)$$

$$\beta_\alpha = 2g_A (g_\alpha + g_M) \quad (5.112)$$

$$\beta_M = 2g_A (g_\alpha + g_M) \quad (5.113)$$

On remarque que ces expressions valident celles obtenues à une boucle.

5.4.2 Diagramme de phases

L'étude du diagramme des phases que nous allons présenter ici est basé sur celle de [10] et sur les fonctions β à une boucle décrit au paragraphe précédent. Nous regardons les directions asymptotiques des trajectoires du groupe de renormalisation. Ces directions correspondent aux directions dans l'espace des constantes de couplages qui sont préservées par le flot du groupe de renormalisation. Pour déterminer si elles sont attractives ou non, nous projetons le flot sur la sphère et nous étudions le champ de vecteurs ainsi obtenu.

Il nous faut donc chercher dans l'espace des constantes de couplages, des droites passant par l'origine et invariantes sous le flot du groupe de renormalisation. Soit le vecteur $g = (g_A, g_m, g_\alpha, g_M)$ donnant la direction d'une de ces droites, la condition pour que celle-ci soit préservée par le flot est équivalente au fait que g soit colinéaire au champ de vitesse $\dot{g} = \beta(g)$ ce que nous pouvons exprimer par l'équation

$$\beta(g) \wedge g = 0 \quad (5.114)$$

Une autre façon plus pratique de formuler cette condition consiste à écrire g sous la forme $g_i = x_i \lambda(t)$ où les x_i sont des constantes et avec

$$t = \log(l) \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda}{dt} = \lambda^2 \quad (5.115)$$

l étant l'échelle de longueur du système définie par (5.87). Si g et $\beta(g)$ sont colinéaires, nous en déduisons à l'aide de (5.88) l'identité

$$x_i = -C_{jk}^i x^j x^k \quad (5.116)$$

où les coefficients C_{jk}^i sont définis par (5.88).

Pour étudier le type de directions ainsi obtenu, nous allons projeter sur la sphère. Posons $\rho^2 = \sum_i g_i^2$ et $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les angles servant à caractériser les constantes de couplages sur la sphère

$$g_A = \rho \cos \theta_1 \quad (5.117)$$

$$g_m = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (5.118)$$

$$g_M = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (5.119)$$

$$g_M = \rho \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (5.120)$$

Les équations du groupe de renormalisation se réécrivent alors

$$\dot{\theta}_j = \rho \beta_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad \text{et} \quad \dot{\rho} = \rho^2 \beta_\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (5.121)$$

Les zéros des fonctions β_j nous redonnent les directions stables. Pour regarder si la direction est attractive ou non, il suffit de développer ces fonctions autour de ces directions et de calculer les valeurs propres associées. Pour que la direction soit attractive, il faut que toutes les valeurs propres soient négatives. Le signe de β_ρ nous permet de savoir si le flot le long de ces trajectoires tend vers l'infini ($\dot{\rho} > 0$) ou vers l'origine ($\dot{\rho} < 0$)

Appliquons cette technique au cas des équations du groupe de renormalisation de notre modèle dans la limite $N \rightarrow \infty$. Il existe six directions conservées par le flot

$$\begin{aligned} A &\equiv (g_A \neq 0, g_m = g_M = g_\alpha = 0) \\ B &\equiv (g_m - g_A = 0, g_M + g_A = 0, g_\alpha + g_A = 0) \\ C &\equiv (g_m - g_A = 0, g_M - g_A = 0, g_\alpha - g_A = 0) \end{aligned}$$

Chacune de ces trois directions A, B et C pouvant être parcourues soit dans le sens des g_A positifs (A_+, B_+ et C_+) soit dans le sens des g_A négatifs (A_-, B_- et C_-). En projetant sur la sphère, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} A_+(g_A > 0) &\equiv \dot{\rho} > 0 \quad \text{et} \quad \text{répulsive} \\ A_-(g_A < 0) &\equiv \dot{\rho} < 0 \quad \text{et} \quad \text{répulsive} \\ B_+(g_A > 0) &\equiv \dot{\rho} > 0 \quad \text{et} \quad \text{répulsive} \\ B_-(g_A < 0) &\equiv \dot{\rho} < 0 \quad \text{et} \quad \text{répulsive} \\ C_+(g_A > 0) &\equiv \dot{\rho} > 0 \quad \text{et} \quad \text{attractive} \\ C_-(g_A < 0) &\equiv \dot{\rho} < 0 \quad \text{et} \quad \text{répulsive} \end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, il existe une seule direction dans le secteur des constantes de couplage positives qui soit attractive C_+ . Elle correspond au cas où toutes les constantes sont égales $g_m = g_\alpha = g_M = g_A = g$. C'est pourquoi nous appellerons cette direction, la direction isotrope. La fonction β associée vaut

$$\beta_g = 4g^2 \quad (5.122)$$

Une étude identique à partir de fonctions β à tout ordre montre que la direction isotrope reste présente prouvant ainsi qu'elle n'est pas un artefact de la troncation à une boucle.

La direction isotrope décrit donc la classe d'universalité dans la région où les constantes de couplages sont toutes positives. Elle correspond à un système fortement couplé ($\dot{\rho} > 0$). Nous verrons dans la section 5.6 l'étude de ce système grâce au modèle sigma non-linéaire.

5.5 Séparation spin-charge

Pour l'instant, nous n'avons pas encore fait le lien entre l'effet Hall quantique de spin et notre modèle. Par construction, ce dernier présente bien un phénomène de localisation. Pour autant la séparation entre le spin et la charge portés par des excitations différentes n'est pour l'instant pas évidente.

Dans un premier temps, commençons par clarifier la notion de charge et de spin pour ce modèle. Le spin (ou plus exactement l'algèbre de spin) est identifié à l'algèbre $sp(2N)_0$ et à la symétrie associée. L'algèbre $osp(2N|2N)_{-2N}$ contient des courants chargés (cf (5.50)), l'algèbre de charge est donc identifiée à cette dernière.

La séparation spin-charge peut déjà être observée dans la théorie libre. Pour cela, construisons les tenseurs énergie-impulsion de Sugarawa pour chacune des algèbres de courant.

$$T_{sp(2N)_0} = \frac{1}{8(N+1)} \lim J^a(z) J_a(w) \quad (5.123)$$

$$T_{osp(2|2)_{-2N}} = -\frac{1}{8(N+1)} \lim \text{STr}(K(z) K(w)) \quad (5.124)$$

Si nous notons T_{cft} le tenseur énergie-impulsion de la théorie libre défini par

$$T_{cft} = -\frac{1}{2} (\phi^t \partial \phi) \quad (5.125)$$

il est alors possible de montrer [8] (par un calcul direct ou par l'évaluation des dimensions conformes dans chaque secteur) que celui-ci peut s'écrire comme la somme des tenseurs (5.123) et (5.124)

$$T_{cft} = T_{sp(2N)_0} + T_{osp(2|2)_{-2N}} \quad (5.126)$$

Notons que cette séparation n'est pas valable pour la représentation de l'algèbre $osp(4N|4N)$ utilisée ici (voir [8] pour plus de détails).

Cette séparation reste valable en présence du désordre. Ceci peut se voir directement sur les fonctions β à une boucle. En effet, si nous imposons $g_\alpha + g_m = 0$ et $g_\alpha + g_M = 0$, alors nous observons le découplage

$$\beta_A = \frac{2(N+1)}{N} g_A^2 \quad (5.127)$$

$$\beta_\alpha = -\frac{2}{N} g_\alpha^2 \quad (5.128)$$

$$\beta_m = \beta_M = \frac{2}{N} g_m^2 \quad (5.129)$$

Ainsi pour cet ajustement des constantes de couplages, le potentiel de jauge A est marginalement relevant alors que les autres perturbations sont marginalement irrelevante. Au niveau des opérateurs marginaux, nous obtenons une simplification équivalente. Pour l'opérateur associé à l'algèbre de charge, nous avons

$$\begin{aligned} L_{\text{charge}} &= g_\alpha (\mathcal{O}_\alpha - \mathcal{O}_m - \mathcal{O}_M) \\ &= g_\alpha \text{STr} \left(\left(\tau^a \phi \phi^t \tau_a + \frac{1}{2N} \phi \phi^t + \mathcal{T}^i \phi \phi^t \mathcal{T}_i \right) \bar{\phi} \bar{\phi}^t \right) \\ &= g_\alpha \text{STr} \left((T^A \phi \phi^t T_A) \bar{\phi} \bar{\phi}^t \right) \end{aligned}$$

en ayant utilisé les relations (5.73-5.76). Grâce à la définition de la matrice des courants K et à la relation (5.85), nous en déduisons l'identité

$$L_{\text{charge}} = g_\alpha \text{tr}_{gl(2N)} (K \overline{K}) \quad (5.130)$$

De même pour l'opérateur lié à l'algèbre de spin, compte tenu de (5.79) nous avons

$$\begin{aligned} L_{\text{spin}} &= g_A \mathcal{O}_A \\ &= g_A J^a J_a \end{aligned} \quad (5.131)$$

Ainsi L_{charge} s'exprime uniquement à partir des générateurs de $osp(2|2)_{-2N}$ et L_{spin} uniquement à partir des générateurs de $sp(2N)_0$. Le terme d'interaction total

$$L_{\text{total}} = L_{\text{charge}} + L_{\text{spin}}$$

s'écrit donc comme la somme de deux interactions courant-courant commutant, prouvant que la séparation spin charge reste valable pour la théorie perturbée.

5.6 Approche par le modèle sigma et conclusions

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe 5.4.2, la physique à basse énergie du modèle pour la direction isotrope $g_m = g_M = g_\alpha = g_A = g$ peut être décrite par un modèle sigma avec un terme topologique. Cette étude ne faisant pas partie de cette thèse, nous nous contenterons de présenter les grandes lignes, le détail étant donné dans l'article [8].

La technique est la même que celle développée dans [19]. La théorie effective est obtenue en effectuant un développement en gradient autour du point col déduit de la limite $N \rightarrow \infty$ en utilisant une transformation de Hubbard-Stratonovich. Les degrés de liberté

du modèle effective sont associés à des modes de Goldstone issus de la brisure de symétrie $OSp(2|2) \rightarrow GL(1|1)$. L'action effective est un modèle sigma non-linéaire sur l'espace supersymétrique $OSp(2|2)/GL(1|1)$ auquel il est possible d'ajouter un terme topologique. A grande distance, le modèle est dans un secteur de couplage fort et devient probablement massif puisqu'il est possible de montrer qu'il n'y a pas de contribution du terme topologique. La masse engendrée est d'ordre

$$m_N \simeq \mu e^{-\frac{N}{2\pi}} \quad (5.132)$$

où μ est le cut-off ultraviolet.

Nous en déduisons ainsi que le point fixe infrarouge est trivial et que les états d'énergie nulle sont localisés avec une longueur de localisation de l'ordre de $\frac{1}{m_N}$.

Une approche similaire a été appliquée pour le système avec un ajustement des constantes de couplage permettant d'obtenir la séparation spin-charge : $g_m = g_M = g_\alpha = 0$ et $g_A = g$.

Pour résumer, nous avons généralisé un modèle de délocalisation dont la particularité est que la formulation en théorie des champs aboutit à un point fixe infrarouge trivial. Nous avons montré en particulier que les modèles d'hamiltoniens de Dirac désordonnés appartenant à la classe 4^- dans la classification [10] étaient dans la même classe d'universalité qu'un modèle où les variables aléatoires seraient distribuées de manière isotropique sur les quatre types de potentiels désordonnés.

Annexe A

Calcul des coefficients algébriques

Nous présenterons dans cette annexe tous les outils nécessaires au calcul des développements de produit d'opérateurs. Commençons par énoncer les conventions algébriques que nous utilisons.

Les générateurs de $sl(2N)$ sont notés T^A , ceux de $sp(2N)$ τ^a et ceux du complément de $sp(2N)$ dans $sl(2N)$ \mathcal{T}^i . $sl(2N)$ possède $4N^2 - 1$ générateurs et $sp(2N)$ $N(2N + 1)$ générateurs. Les normalisations sont choisies de la façon suivante

$$\text{tr}(T^A T^B) = \delta_{A,B}, \quad \text{tr}(\mathcal{T}^i \mathcal{T}^j) = \delta_{i,j}, \quad \text{tr}(\tau^a \tau^b) = \delta_{a,b} \quad (\text{A.1})$$

Grâce à ces conventions, la position haute ou basse des indices est indifférente. Les relations de commutation intervenant dans ce problème sont

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}^i, \mathcal{T}^j] &= if^{ij}{}_k \mathcal{T}^k, & [\tau^a, \tau^b] &= if^{ab}{}_c \tau^c \\ [\tau^a, \mathcal{T}^i] &= if^{ai}{}_j \mathcal{T}^j, & [T^A, T^B] &= if^{AB}{}_C T^C \\ \{\tau^a, \tau^b\} &= ib^{ab}{}_k \tau^k + x^{ab} 1, & \{\tau^a, \mathcal{T}^i\} &= ib^{ai}{}_b \tau^b \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur et $\{\cdot, \cdot\}$ l'anticommutateur. Il est aisé de vérifier que les facteurs de forme f et b sont bien invariants par permutation circulaire et possède des propriétés d'antisymétrie (resp. symétrie) lors de la permutation de deux indices pour f (resp. b).

Lors du calcul des OPE, un certain nombre de relations algébriques sont utiles. Nous donnons dans le tableau ci-dessous, l'ensemble des identités et leur simplification associée qui sont apparaissent.

Coefficients	Identité	Valeur
\mathcal{C}	$T^A T^A = \mathcal{C}$	$(4N^2 - 1)/2N$
C	$\tau^a \tau^a = C$	$(2N + 1)/2$
D_{TT}	$f^{CDA} f^{CDB} = -D_{TT} \delta^{AB}$	$4N$
$D_{\tau\tau}$	$f^{cda} f^{cdb} = -D_{\tau\tau} \delta^{ab}$	$2(N + 1)$
C'	$\mathcal{T}^i \mathcal{T}^i = C'$	$(2N + 1)(N - 1)/2N$
x_{TTT}	$T^A T^B T^A = x_{TTT} T^B$	$-1/2N$
$x_{\tau\tau\tau}$	$\tau^a \tau^b \tau^a = x_{\tau\tau\tau} \tau^b$	$-1/2$
$x_{\mathcal{T}\tau\mathcal{T}}$	$\mathcal{T}^i \tau^a \mathcal{T}^i = x_{\mathcal{T}\tau\mathcal{T}} \tau^a$	$(N - 1)/2N$
$x_{\tau\mathcal{T}\tau}$	$\tau^a \mathcal{T}^i \tau^a = x_{\tau\mathcal{T}\tau} \mathcal{T}^i$	$1/2$
$x_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}}$	$\mathcal{T}^i \mathcal{T}^j \mathcal{T}^i = x_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{T}} \mathcal{T}^j$	$-(N + 1)/2N$
$D_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$	$f^{ija} f^{ijb} = -D_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \delta^{ab}$	$2(N - 1)$
$D_{\tau\mathcal{T}}$	$f^{aki} f^{akj} = -D_{\tau\mathcal{T}} \delta^{ij}$	$2N$
$B_{\tau\tau}$	$b^{abi} b^{abj} = -B_{\tau\tau} \delta^{ij}$	$-2(N + 1)$
$B_{\tau\mathcal{T}}$	$b^{cia} b^{cib} = -B_{\tau\mathcal{T}} \delta^{ab}$	$-2(N^2 - 1)/N$
x	$x^{ab} x^{ab} = x$	$(2N + 1)/N$

Les quatre premiers coefficients sont les Casimirs des algèbres $sp(2N)$ et $sl(2N)$ dans les représentations fondamentales et adjointes. Moyennant le choix de normalisation des générateurs, nous les trouvons facilement dans n'importe quel ouvrage traitant des algèbres de Lie. Pour donner un aperçu de la techniques à employer pour obtenir les autres coefficients, nous allons démontrer quelques formules typiques.

Retrouvons la valeur de $x_{\tau\tau\tau}$. En partant de $\tau^a \tau^b \tau_a$, nous en déduisons

$$\begin{aligned}
 \tau^a \tau^b \tau_a &= \tau^b \tau^a \tau_a + f^{ab}{}_c \tau^c \tau_a \\
 &= C \tau^b + \frac{1}{2} f^{ab}{}_c f^c{}_{ad} \tau^d \\
 &= \left(C - \frac{1}{2} D_{\tau\tau} \right) \tau^b
 \end{aligned}$$

Ainsi $x_{\tau\tau\tau} = C - \frac{1}{2} D_{\tau\tau}$. On vérifie aisément que la valeur numérique est bien celle inscrite dans le tableau. De même pour $B_{\tau\mathcal{T}}$, considérons $b^{ai}{}_b b_{ai}{}^b$. Si nous effectuons tout d'abord la somme sur les indices a et i , nous avons

$$b^{ai}{}_b b_{ai}{}^b = B_{\tau\mathcal{T}} \dim(sp(2N))$$

En sommant en premier sur a et b et en utilisant les propriétés d'invariance du facteur de forme, nous pouvons écrire

$$b^{ai}{}_b b_{ai}{}^b = B_{\tau\mathcal{T}} (\dim(sl(2N)) - \dim(sp(2N)))$$

Le calcul de $B_{\tau\mathcal{T}}$ s'effectuant par une identité similaire à $x_{\tau\tau\tau}$, nous avons ainsi déterminé $B_{\tau\mathcal{T}}$. Les autres formules s'obtiennent de façon similaire.

Afin de démystifier les formules pour les OPE, nous allons donner les grandes étapes de la démonstration dans un cas simple. Intéressons-nous l'OPE pour les courants $sp(2N)$ définis par $J^a(z) = \phi^t(z) \tau^a \phi(z)$. Il nous faut développer

$$(\phi^t(z) \tau^a \phi(z)) (\phi^t(0) \tau^b \phi(0))$$

Commençons par les termes en $\frac{1}{z^2}$. Ils correspondent au cas où nous avons deux contractions. En utilisant l'OPE pour les supermultiplets

$$\begin{aligned}\phi_i(z) \phi_j^t(0) &\sim \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1_{2N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{2N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{2N} \end{pmatrix}_{ij} \\ \phi_i^t(z) \phi_j(0) &\sim \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1_{2N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{2N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_{2N} \end{pmatrix}_{ij} \\ \phi_i(z) \phi_j(0) &\sim \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma & 0 & 0 \\ \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \end{pmatrix}_{ij} \\ \phi_i^t(z) \phi_j^t(0) &\sim \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma & 0 & 0 \\ \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Sigma \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \end{pmatrix}_{ij}\end{aligned}$$

nous en déduisons que le terme total en $\frac{1}{z^2}$ est de la forme

$$\frac{1}{z^2} \left(\text{tr} \begin{pmatrix} \tau^a \tau^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^a \tau^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau^a \tau^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^a \tau^b \end{pmatrix} - \text{tr} \begin{pmatrix} -\tau^b \tau^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^b \tau^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau^b \tau^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^b \tau^a \end{pmatrix} \right)$$

et est par conséquent nul. Pour les termes d'ordre $\frac{1}{z}$, nous avons quatre contributions. Celles provenant des contractions $\phi\phi$ et $\phi^t\phi^t$ sont nulles. Celle issue de la contraction $\phi\phi^t$ nous donne à l'ordre -1

$$\frac{1}{z} \phi^t(0) \left(\tau^a \tau^b \right) \phi(0)$$

et celle provenant de $\phi^t\phi$ (en tenant compte du signe provenant de l'anticommutation des composantes fermioniques)

$$-\frac{1}{z} \phi^t(0) \left(\tau^b \tau^a \right) \phi(0)$$

Nous retrouvons l'algèbre de courant

$$J^a(z) J^b(0) \sim \frac{1}{z} f^{ab}{}_c J^c(0) + \text{termes réguliers}$$

Les OPE pour les opérateurs marginaux utilisent exactement les techniques. Seul le nombre de multiplets plus important complique la tâche. Même si nous ne donnerons pas les démonstrations correspondantes, le lecteur qui souhaitant retrouver ces formules pourra

s'aider des expressions des OPE ci-dessous qui sont celles obtenues avant utilisation des coefficients algébriques. Ceci permet ainsi de tracer la provenance de chaque contribution.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_m(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \frac{2}{N} \mathcal{O}_m(0) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(2C \mathcal{O}_m(0) - \frac{1}{N} \mathcal{O}_A(0) - \frac{1}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) \right) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(-4C \mathcal{O}_m(0) - \frac{2}{N} \mathcal{O}_\alpha(0) \right) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_A(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) &= -\frac{1}{z\bar{z}} 2D_{\tau\tau} \mathcal{O}_A(0) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_\alpha(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(-4x_{\tau\tau\tau} \mathcal{O}_\alpha(0) - \frac{1}{2} D_{\tau\tau} \mathcal{O}_A(0) \right) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_A(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) &= -4 \frac{1}{z\bar{z}} \left(x_{\tau\tau\tau} + \frac{D_{\tau\tau}}{4} \right) \mathcal{O}_\alpha(0) \\
&\quad + \frac{1}{z\bar{z}} (-2xN \mathcal{O}_m(0) + B_{\tau\tau} \mathcal{O}_M(0)) + \text{t.r.} \\
\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_M(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(2C' \mathcal{O}_m(0) + \frac{1}{N} \mathcal{O}_M(0) \right) \\
\mathcal{O}_M(z, \bar{z}) \mathcal{O}_M(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(4x_{\tau\tau\tau} \mathcal{O}_M(0) - \frac{D_{\tau\tau}}{2} \mathcal{O}_A(0) \right) \\
\mathcal{O}_m(z, \bar{z}) \mathcal{O}_\alpha(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} \left(-2x_{\tau\tau\tau} \mathcal{O}_\alpha(0) + 2x_{\tau\tau\tau} \mathcal{O}_M(0) + \frac{B_{\tau\tau}}{2} \mathcal{O}_A(0) \right) \\
\mathcal{O}_M(z, \bar{z}) \mathcal{O}_A(0) &= \frac{1}{z\bar{z}} (- (D_{\tau\tau} + 4x_{\tau\tau\tau}) \mathcal{O}_M(0) + B_{\tau\tau} \mathcal{O}_\alpha(0))
\end{aligned}$$

Annexe B

Programme pour les OPE

Comme nous l'avons vu dans l'annexe A, les OPE peuvent être déterminés à l'aide des supermultiplets par un calcul direct. Mais lorsque nous avons déterminé pour la première fois cette algèbre, nous ignorions cette technique. Nous avons donc employé une autre méthode. Compte tenu de la lourdeur des calculs, il a semblé judicieux de développer un programme permettant d'effectuer cette tâche. Cette annexe présentera les grandes lignes de l'algorithme utilisé et son implémentation.

Dans le développement “à la main” d'un produit d'opérateurs, nous pouvons distinguer trois phases distinctes. La première consiste à appliquer le théorème de Wick et à développer les expressions au voisinage des singularités. Une fois cette opération effectuée, il est nécessaire de simplifier le résultat. Il s'agit d'appliquer des règles algébriques permettant de regrouper les termes identiques. Enfin la dernière étape a pour but d'étudier les termes restants et en particulier de les identifier à des opérateurs connus. La méthode que nous avons choisi pour le calcul symbolique des OPE suit exactement ce découpage, en utilisant à chaque fois la technique qui nous paraissait être optimale.

Avant d'explicitier l'algorithme, il nous faut définir les objets sur lesquels nous allons travailler. Dans notre cas, un opérateur (au sens large du terme, incluant ceux dont nous cherchons l'algèbre ainsi que le résultat d'un OPE) peut être considéré comme une somme de termes s'exprimant comme le produit de

- $\pm \frac{N.a.b...}{D.c.d...}$ un facteur constant où N et P sont des entiers et $a, b, c, d...$ sont des constantes littérales.
- $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{n_{ij}} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\bar{n}_{ij}}$ une fonction rationnelle dans les variables z_i .
- $\partial^{n_1} \Psi_{i_1}(z_{j_1}) \dots \partial^{n_k} \Psi_{i_k \pm}(z_{j_k})$ un produit de dérivées de champs libres fermioniques de chiralité gauche.
- $\bar{\partial}^{n_1} \bar{\Psi}_{i_1}(z_{j_1}) \dots \bar{\partial}^{n_k} \bar{\Psi}_{i_k \pm}(z_{j_k})$ un produit de dérivées de champs libres fermioniques de chiralité droite.
- $\partial^{n_1} \beta_{i_1}(z_{j_1}) \dots \partial^{n_k} \beta_{i_k \pm}(z_{j_k})$ un produit de dérivées de champs libres bosoniques de chiralité gauche.
- $\bar{\partial}^{n_1} \bar{\beta}_{i_1}(z_{j_1}) \dots \bar{\partial}^{n_k} \bar{\beta}_{i_k \pm}(z_{j_k})$ un produit de dérivées de champs libres bosoniques de chiralité droite.

- $(\tau^{a_1})_{l_1 m_1} \dots (\tau^{a_k})_{l_k m_k} (\mathcal{T}^{b_1})_{i_1 j_1} \dots (\mathcal{T}^{c_{k'}})_{i_{k'} j_{k'}}$ un produit de générateurs pouvant appartenir à des algèbres différentes.
- $f^{a_1 b_1}_{c_1} \dots f^{a_k b_k}_{c_k} \delta^{i_1 j_1} \dots \delta^{i_{k'} j_{k'}}$ un produit de facteurs de formes associés à des relations de commutation ou d'anticommutation, pouvant appartenir à des algèbres différentes et un produit de forme de Killing que nous supposons pour simplifier, égal au symbole de Kronecker.

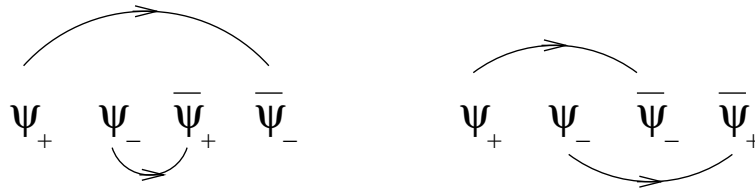
Lorsque nous parlerons dans la suite de terme dans un opérateur, il s'agira d'un produit de ces facteurs.

Comme nous l'avons écrit précédemment, la première étape dans le calcul d'OPE consiste à appliquer le théorème de Wick et à développer l'expression au voisinage d'un point particulier que nous noterons z_0 . Compte tenu des propagateurs pour les champs libres, chaque secteur (bosons et fermions, chiralité droite et gauche) peut être traité séparément. Concrètement, le théorème de Wick est appliqué par récurrence en utilisant le fait que les produits de champs libres sont ordonnés par une convention sur les indices, le type (\pm) et la position. A chaque itération, l'opérateur laissé intact est envoyé à l'itération suivante, puis une contraction est effectuée et la récurrence est appliquée au nouvel opérateur ainsi obtenu. A la fin de la récurrence, un développement autour de z_0 est effectué jusqu'à l'ordre désiré.

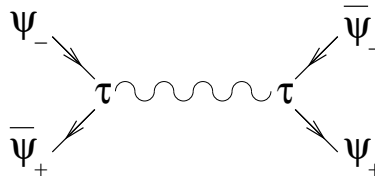
Une fois cette manipulation effectuée, la tâche la plus fastidieuse (pour un humain) est achevée. Nous pourrions nous contenter de ces résultats et effectuer les simplifications manuellement. Mais les expressions obtenues sont tellement longues que leur impression au format latex tient sur plusieurs pages dans le cas des OPE les plus simples. Il est donc impossible de traiter les résultats bruts, ce qui impose d'automatiser aussi la seconde étape.

A ce niveau, seules des simplifications algébriques sont faites. En particulier, nous pouvons découper le résultat précédent suivant l'ordre des pôles en z_0 . Ainsi les simplifications ne peuvent avoir lieu que pour des termes ayant le même ordre. Une des difficultés conceptuelles dans la mise en place d'un tel processus provient du côté intuitif lorsque nous l'effectuons sur une feuille avec un crayon. Prenons par exemple le cas des expressions $\Psi_{+i} \Psi_{-j} \bar{\Psi}_{-i} \bar{\Psi}_{+j}$ et $\Psi_{+j} \Psi_{-i} \bar{\Psi}_{+i} \bar{\Psi}_{-j}$. L'une est l'opposée de l'autre. Pour autant, les règles à utiliser pour arriver à cette déduction ne sont pas si simples que cela : nous avons employé le fait que les fermions anticommutaient et surtout que les indices sur les composantes étaient muets et que nous pouvions effectuer la permutation $i \longleftrightarrow j$.

Pour regarder si deux termes sont identiques (à une constante numérique près), la méthode la plus commode est de représenter les expressions comme des graphes. Chaque objet (champ libre, facteur de forme, générateur ...) est associé à un type de noeud et chaque type d'indice (indice sur les éléments d'une algèbre, sur les composantes d'un vecteur...) à un type de lien. Reprenons l'exemple précédent, nous pouvons représenter chacun des termes par



Autre cas un peu plus compliqué : $(\Psi_{-} \tau^a \bar{\Psi}_{+}) (\bar{\Psi}_{-} \tau_a \Psi_{+})$. Nous lui associons le graphe



Au final, tester si deux expressions sont identiques revient à vérifier que les deux graphes sont isomorphes. Le problème est ici légèrement compliqué par la règle d'anticommuation des fermions. Un test d'isomorphie standard nous dit si les deux graphes sont équivalents ou non, au signe près. Il nous faut donc en plus le déterminer. Une fois cette comparaison effectuée, trois possibilités se présentent à nous.

- Soit les deux graphes sont différents et par conséquent aucune simplification n'est possible.
- Soit les deux graphes sont identiques (modulo le signe) et la simplification consiste à ajouter les facteurs numériques.
- Soit il existe un isomorphisme permettant de passer de l'un à l'autre et nous possédons une règle associée permettant de simplifier l'expression. Pour fixer les idées, cela peut correspondre au cas $\tau^a \tau^b$ et $-\tau^b \tau^a$. L'isomorphisme est ici une permutation des générateurs. En appliquant la règle correspondant à la loi de commutation, nous pouvons simplifier ces deux termes et obtenir $f_c^{ab} \tau^c$.

Nous n'avons parlé pour l'instant que de simplifications terme à terme. En général, cette passe est accompagnée par une simplification de l'expression de chaque terme individuellement. Cela consiste à appliquer un certain nombre de règles visant à mettre chaque terme sous une forme canonique réduite au maximum. Ces règles vont du cas de produit de deux objets fermioniques identiques jusqu'aux identités sur les algèbres comme celles décrites dans l'annexe A.

Ces deux passes sont exécutées alternativement jusqu'à ce qu'aucune simplification ne soit plus possible (convergence) ou jusqu'à une profondeur définie par l'utilisateur. Insistons sur l'importance d'avoir à la fin de chaque passe des expressions canoniques pour pouvoir assurer la convergence de l'algorithme. Cela signifie en particulier que les règles doivent être cohérentes (comme par exemple l'une l'inverse de l'autre).

Nous disposons maintenant d'expressions des OPE sous la forme la plus simple que puissent engendrer les règles que nous avons définies. La dernière étape consiste maintenant à regrouper les différents termes pour essayer de faire apparaître des opérateurs connus. Notons que dans l'optique des fonctions β à une boucle, il est possible d'effectuer aisément cette tâche manuellement (ce fut d'ailleurs notre cas). Mais dans des cas plus compliqués, l'automatisation est de nouveau indispensable. Concrètement, le travail à effectuer est encore une fois une étude d'isomorphisme et est par conséquent très similaire à ce que nous avons décrit précédemment.

D'un point de vue technique, le programme représente environ 17000 lignes de code C++ et est composé d'une cinquantaine de classes. Le choix de ce langage s'explique aisément par la modularité du problème à traiter. Nous définissons de manière générale ce qu'est un générateur, un facteur de forme, un champ libre fermionique et bosonique, une règle de simplification unaire et binaire. L'algorithme en lui-même est programmé de telle sorte qu'il ne dépende que de la nature des objets et non des détails de ceux-ci.

Bien que ce travail puisse paraître obsolète de par la technique des supermultiplets, il n'en reste pas moins la première méthode qui nous a permis de mettre en évidence la nécessité d'introduire un terme de masse généralisée pour fermer l'algèbre des opérateurs marginaux et aussi d'obtenir les fonctions β à une boucle pour le cas général $sp(2N)$. L'avantage de

cet outil est qu'il pourrait aisément être appliqué à des problèmes où les supermultiplets ne fonctionneraient pas.

Annexe C

Liste des publications

– Large N Spin Quantum Hall Effect

Nous introduisons une version à grand N du problème de la transition de l'effet Hall quantique de spin. Elle est formulée comme un problème de fermions de Dirac couplés au désordre, dont l'hamiltonien appartient à la classe de symétrie C . Les fermions portent des degrés de liberté de spin à valeur dans l'algèbre $sp(2N)$, l'effet Hall quantique de spin correspondant au cas $N = 1$. Des arguments basés sur les transformations du groupe de renormalisation ainsi que sur une formulation basée sur un modèle sigma valable dans la limite de N grand, indique l'existence d'un changement de classe d'universalité lorsque N varie. Contrairement au cas $N = 1$, nous montrons que les modèles à grand N conduisent à des états d'énergie nulle localisés. Nous présentons aussi une analyse du modèle sigma pour les fermions de Dirac couplés uniquement à un potentiel de jauge $sp(2N)$ aléatoire, reproduisant des résultats exacts connus.

Référence : D. Bernard, N. Regnault et D. Serban, Nucl. Phys B612 (2001) 291.

Bibliographie

- [1] K. Von Klitzing, G. Dorda et M. Pepper, Phys. Rev. Lett. 92(1980)494.
- [2] R. Joynt et R.E. Prange, Phys. Rev. B29(1984)3303.
- [3] R.B. Laughlin, Phys. Rev. B23(1981)5632.
- [4] J.T. Chalker et P.D. Coddington, J. Phys. C 21(1988)2665.
- [5] J.T. Chalker et C.-M. Ho, Phys. Rev. B54(1996)8708.
- [6] J.T. Chalker et P.D. Coddington, Phys. Rev. B54(1996)8708.
- [7] B. Huckestein, Europhys. Lett. 20(1992)451.
- [8] D. Bernard, N. Regnault et D. Serban, Nucl. Phys B612(2001)291.
- [9] D. Bernard, *Conformal field theory applied to 2d disordered systems : an introduction* dans proceeding of Cargèse conference, Juillet 1995, Nato ASI series B : physics vol. 362, Plenum Press (1995).
- [10] D. Bernard et André LeClair, Phys.Rev. B64(2001)045306.
- [11] D. Bernard et André LeClair, cond-mat/0109552.
- [12] T. Senthil, M.P.A Fisher, L. Balents et C. Nayak, Phys. Rev. Lett. 81(1998)4704.
- [13] T. Senthil, J.B. Marston et M.P.A Fisher, Phys. Rev. B60(1999)4245 .
- [14] K.B. Efetov, Adv. Phys. 163(1983)53.
- [15] E. Fradkin, Phys. Rev. B33(1986)3257.
- [16] V. Kagalovsky, B. Horovitz, Y. Avishai et J.T. Chalker, Phys. Rev. Lett. 82(1999)3516.
- [17] A. Altland et M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B55(1997)1142.
- [18] A. B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A4(1989)4235.
- [19] M. Bocquet, D. Serban et M.R. Zirnbauer, Nucl. Phys. B578(2000)628.
- [20] V. Dotsenko, Theories conformes 1ère partie, Notes de cours.
- [21] B. Gerganov, A. LeClair et M. Moriconi, Phys.Rev.Lett. 86(2001)4753.

Troisième partie

Groupe de renormalisation par la
matrice de densité

Chapitre 6

Application du DMRG à l'effet Hall quantique fractionnaire

Sommaire

6.1	Introduction	145
6.2	L'algorithme du groupe de renormalisation par la matrice de densité	146
6.2.1	Algorithme de Lánczos, limitations informatiques	146
6.2.2	Principe du DMRG	147
6.2.3	Succès et limites du DMRG	151
6.3	Effet Hall quantique fractionnaire	151
6.3.1	Description du phénomène	151
6.3.2	Modélisation	152
6.4	Conclusions	155

6.1 Introduction

L'utilisation de techniques numériques, en particulier les diagonalisations exactes, a joué un rôle fondamental dans l'étude du phénomène de l'effet Hall quantique fractionnaire (voir [1] et les références incluses). Même si l'apparition de transitions pour des valeurs fractionnaires du taux de remplissage s'explique par l'existence d'excitations portant une charge fractionnaire et suivant une statistique fractionnaire, il existe encore à l'heure actuelle certaines zones d'ombre.

Parmi les problèmes soulevés récemment, nous donnerons comme exemple celui de l'apparition de phases partiellement polarisées pour le taux de remplissage $\nu = 2/3$. La polarisation \mathcal{P} est définie par le rapport entre la différence du nombre d'électrons ayant un spin up et ceux ayant un spin down, et le nombre total d'électrons. La théorie des quasi-particules prédit que seuls deux états de polarisation $\mathcal{P} = 0$ et $\mathcal{P} = 1$ pour $\nu = 2/3$. Or des expériences récentes [2] et [3] semblent mettre en évidence des phases partiellement polarisées et plus particulièrement une phase très nette pour $\mathcal{P} = 3/4$.

Le principal problème des diagonalisations exactes réside dans la taille des espaces de Hilbert et par conséquent du nombre de fermions qu'il est possible d'atteindre. L'algorithme du groupe de renormalisation par la matrice de densité que nous nommerons DMRG dans ce qui suit (acronyme anglais *Density Matrix Renormalization Group*) est une méthode numérique

qui a permis d'obtenir dans divers domaines de la physique des résultats avec une précision jamais atteinte auparavant, grâce à des dimensions d'espace de Hilbert beaucoup plus importantes. L'idée d'appliquer cet algorithme à l'effet Hall quantique fractionnaire est par conséquent plutôt attirante.

Ce chapitre a pour vocation de présenter les bases nécessaires à une telle entreprise. Il s'agit à l'heure actuelle d'un nouveau domaine d'étude. Aucun résultat nouveau ne sera donc exposé ici. Nous allons esquisser ce qui sera, nous l'espérons, une voie fructueuse de recherche pour explorer les problèmes tels que celui soulevé précédemment. Nous espérons que le côté introductif de cette présentation éveillera l'intérêt du lecteur sur ce travail naissant.

6.2 L'algorithme du groupe de renormalisation par la matrice de densité

6.2.1 Algorithme de Lánczos, limitations informatiques

Pour insister sur les limitations des méthodes de diagonalisation exacte, nous allons présenter l'algorithme de Lánczos [4], un des algorithmes de diagonalisation exactes qu'il est possible d'employer si nous ne souhaitons obtenir qu'une partie du spectre. Considérons un système défini par un hamiltonien H supposé hermitien et un espace de Hilbert de dimension N . Nous notons $\{|i\rangle\}$ l'ensemble des vecteurs propres supposés orthonormés et $\{\lambda_i\}$ avec $|\lambda_{i+1}| \geq |\lambda_i|$. Cet algorithme permet d'accéder rapidement aux premières valeurs propres classées et peut être vu comme l'amélioration de la technique suivante. Soit un vecteur aléatoire normé $|\varphi_0\rangle$, appliquons n fois l'hamiltonien sur ce dernier. La décomposition de $|\varphi_0\rangle$ sur les vecteurs propres de H nous permet d'écrire

$$H^n |\varphi_0\rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n \langle i | \varphi_0 \rangle |i\rangle \quad (6.1)$$

Pour n suffisamment grand, le terme en λ_0^n va dominer la somme. Ainsi $H^n |\varphi_0\rangle$ sera colinéaire à $|0\rangle$, ce qui nous permet par conséquent d'obtenir ce vecteur ainsi que la valeur propre associée.

L'algorithme de Lánczos peut être vu comme une version optimisée de la méthode que nous venons de décrire. Partons comme précédemment d'un vecteur aléatoire normé $|\varphi_0\rangle$ et définissons $|\varphi_1\rangle$ par

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi_0 | H^2 | \varphi_0 \rangle - \langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle^2}} (H |\varphi_0\rangle - \langle \varphi_0 | H | \varphi_0 \rangle |\varphi_0\rangle) \quad (6.2)$$

Par construction, $|\varphi_1\rangle$ est normé et orthogonal à $|\varphi_0\rangle$ (nous avons utilisé le fait que H est hermitique). Les autres vecteurs sont définis par récurrence grâce à la relation

$$|\varphi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \varphi_{i-1} | H^2 | \varphi_{i-1} \rangle - \langle \varphi_{i-1} | H | \varphi_{i-1} \rangle^2 - \langle \varphi_{i-2} | H | \varphi_{i-1} \rangle^2}} \times (H |\varphi_{i-1}\rangle - \langle \varphi_{i-1} | H | \varphi_{i-1} \rangle |\varphi_{i-1}\rangle - \langle \varphi_{i-2} | H | \varphi_{i-1} \rangle |\varphi_{i-2}\rangle) \quad (6.3)$$

La base ainsi obtenue est bien orthonormée. Regardons les éléments de matrices de H dans cette base et plus particulièrement $\langle \varphi_{i-2} | H | \varphi_i \rangle$. Le calcul direct nous conduit au résultat suivant

$$\langle \varphi_{i-2} | H | \varphi_i \rangle = 0$$

De même, on montre aisément que $\langle \varphi_i | H | \varphi_j \rangle = 0$ si $|i - j| \geq 2$. L'hamiltonien exprimé dans cette base est donc tridiagonal. L'expression des valeurs propres peut alors s'obtenir très rapidement grâce à l'algorithme de Householder par exemple.

Tel que nous l'avons présenté, l'algorithme permet d'obtenir tout le spectre. Or, il s'avère que cette méthode est instable numériquement : en général la relation d'orthogonalité $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = 0$ n'est plus valide dès que $|i - j|$ est de l'ordre de 10. Mais notre but n'est pas d'avoir l'intégralité du spectre, il s'agit juste d'obtenir l'énergie du fondamental et, à l'occasion, des premiers états excités. L'idée est de diagonaliser à chaque itération, l'hamiltonien dans le sous-espace des vecteurs déjà obtenus et de regarder la convergence des valeurs propres. Si nous nous appuyons sur ce que nous avons vu précédemment à propos du calcul de λ_0 , nous en déduisons que nous allons converger rapidement vers les valeurs de plus grand module. Comme il est toujours possible de translater le spectre, nous pouvons toujours faire en sorte que λ_0 soit le fondamental à une translation près.

L'avantage de l'algorithme de Lanczös est de pouvoir traiter des espaces de Hilbert relativement importants dans des temps très raisonnables. En effet si nous sommes intéressés uniquement par les énergies, seuls trois vecteurs sont nécessaires pour la récurrence. Si l'hamiltonien n'est pas stocké directement, il est alors possible d'avoir des espaces assez grands comme pour le cas présenté dans l'annexe B. Bien sûr, l'algorithme n'est pas sans défaut et son instabilité numérique n'est pas sans poser de difficulté lors de l'étude des états excités. Nous n'aborderons pas plus ce sujet ici puisque notre but n'est pas l'étude détaillée de celui-ci.

La principale limitation de ce type de méthode provient de son coût en mémoire. A titre d'exemple, si nous raisonnons sur un système de n fermions sans spin pouvant être placés sur m sites. La taille de l'espace de Hilbert est $d = C_m^n$. Concrètement, pour $n = 10$ et $m = 30$ nous obtenons $d \approx 3.10^6$. A l'heure où nous rédigeons cet exposé, la capacité mémoire d'une station de travail atteint facilement 1Go. Rien que l'espace nécessaire au stockage des vecteurs est de l'ordre de 150Mo. Si nous ajoutons un site, la dimension de l'espace de Hilbert passe à plus de 44 millions requérant au minimum 2Go. Ces contraintes deviennent encore plus importantes si nous souhaitons plus d'informations que le simple calcul du fondamental. Bien sûr une étude des symétries permet en général de réduire d de manière conséquente au prix d'une complication importante du programme. Malheureusement, la taille des systèmes physiques considérés reste limitée. Si nous voulons accéder à des tailles plus importantes, il est nécessaire d'effectuer certaines simplifications permettant de réduire la taille de l'espace de Hilbert à considérer.

6.2.2 Principe du DMRG

Le DMRG est un algorithme s'appliquant au système physique pouvant être découpé en une chaîne de blocs identiques interagissant uniquement avec leurs plus proches voisins. Nous ferons plusieurs hypothèses simplificatrices au cours de cette présentation dans le but d'être plus pédagogique en éliminant certaines difficultés non-essentiels. En particulier nous travaillerons dans le cas d'une chaîne unidimensionnelle ouverte et à température nulle ce qui permettra de simplifier l'expression de la matrice de densité.

Pour un modèle construit par ajouts successifs de bloc, l'hamiltonien du système peut se mettre sous la forme

$$H = \sum_{i=1}^n H_i + \sum_{i=1}^{n-1} H_{int\ i,i+1} \quad (6.4)$$

où H_i est l'hamiltonien du i -ème bloc et $H_{int\ i,i+1}$ le terme d'interaction entre le bloc i et le

bloc $i + 1$. Nous notons $|\varphi_\alpha\rangle$ les états propres d'un bloc. Il est ainsi possible d'écrire la base des états du système de la manière suivante

$$|\varphi_{\alpha_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{\alpha_n}\rangle = |\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle \quad (6.5)$$

Comme illustration d'un tel système, nous pouvons choisir celui du modèle d'Heisenberg à une dimension pour des spins 1 avec une constante de couplage constante. L'hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} S_i S_{i+1} \quad (6.6)$$

Il est aisé de voir que ce système est bien de la forme (6.4). Historiquement ce système est celui sur lequel White [5] développa cet algorithme.

Pour simplifier cet exposé, nous supposons que l'interaction entre bloc peut s'écrire sous la forme

$$H_{int} = \sum_{i=1}^p \kappa_{i,j} \mathcal{O}_{1,i} \mathcal{O}_{2,j} \quad (6.7)$$

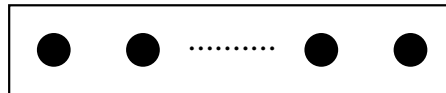
où $\{\mathcal{O}_{k,i}\}$ est un ensemble d'opérateurs agissant sur le k -ième bloc et $\kappa_{i,j}$ représente la matrice des constantes de couplage. Dans le cas du modèle de la chaîne de spin 1, ces opérateurs ne sont autres que les trois composantes S_x , S_y et S_z du k -ième spin et $\kappa_{i,j} = J\delta_{i,j}$ est diagonale et proportionnelle à la constante de couplage J .

Avec une décomposition telle que (6.4), il est assez naturel de penser à construire par itération un système de taille N donné. Mais n'oublions pas que nous souhaitons atteindre des valeurs de N grands pour pouvoir aller au-delà des limitations des diagonalisations exactes. Nous pourrions penser naïvement qu'il suffit de garder à chaque étape les premiers états, pour obtenir ainsi un hamiltonien effectif du système de i blocs. Il s'avère malheureusement que ce type de raisonnement aboutit à des résultats numériques totalement erronés (cf [5] pour une étude des problèmes de cette méthode).

Le problème d'une telle méthode provient du critère de sélection des états à conserver lors de la procédure de renormalisation. La troncation décrite précédemment suppose implicitement que le système effectif obtenu à une étape donnée soit considéré comme isolé. Or, c'est exactement le contraire qui se produit puisqu'il sera mis en interaction avec un bloc lors de l'itération suivante.

L'idée de White [6, 7] pour contourner cette difficulté fut d'introduire une copie du système et de considérer l'équilibre thermodynamique de l'ensemble en interaction système et copie du système. Le but à chaque étape est le même que dans l'algorithme précédent : construire à chaque itération un hamiltonien effectif associé à un nombre d'états donnés m représentant le système pour un nombre de bloc croissant d'une unité à chaque fois.

Illustrons les différentes procédures intervenant dans une itération. Au début de chaque étape nous avons un système effectif associé à i blocs que nous représenterons par



Ce système est décrit par un hamiltonien que nous noterons H_g , ainsi que par un ensemble d'opérateurs $\{\mathcal{O}_{g,i}\}$, l'indice g désignant gauche. L'ensemble est exprimé dans une base de m vecteurs orthonormés $\{|\phi_i\rangle\}$. Ajoutons maintenant un bloc à droite du système



Nous indiquerons bg les grandeurs relatives à ce bloc. La taille de l'espace de Hilbert associé à ce bloc sera notée n .

L'Hamiltonien total de ce système nous est donné par

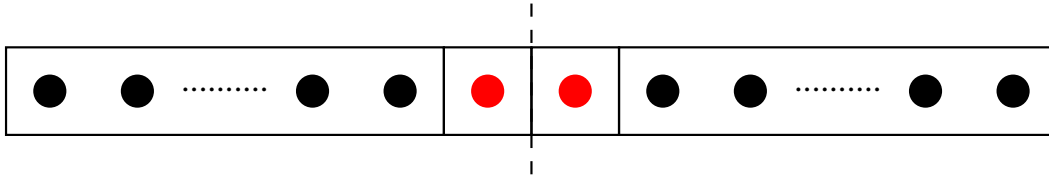
$$H_{g,\text{total}} = H_g + H_{bg} + H_{int,bg \leftrightarrow g} \quad (6.8)$$

avec

$$H_{int,bg \leftrightarrow g} = \sum_{i=1}^p \kappa_{i,j} \mathcal{O}_{g,i} \mathcal{O}_{bg,j} \quad (6.9)$$

L'espace de Hilbert est quant à lui décrit par $\{|\phi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle\}$ et est de dimension mn .

Nous allons maintenant appliquer l'idée de White en construisant un système plus grand à partir du système décrit précédemment mis en interaction avec une copie de lui-même. Pour fixer les idées, il est possible de supposer que le modèle possède une symétrie par rapport au centre de la chaîne. Ainsi la copie que nous allons considérer, n'est autre que l'image du système précédent par rapport à cette symétrie.



Il nous faut maintenant rechercher les m états de la partie gauche permettant d'obtenir la meilleure approximation du fondamental du système total. Physiquement, ceci revient à déterminer les états ayant le poids statistique le plus important dans le système de gauche en équilibre thermodynamique avec le système de droite.

Donnons brièvement les étapes de calcul. L'hamiltonien total du système s'écrit

$$\begin{aligned} H_{\text{total}} = & H_g + H_{bg} + H_{int,bg \leftrightarrow g} \\ & + H_{int,bg \leftrightarrow bd} \\ & + H_{int,bd \leftrightarrow d} + H_d + H_{bd} \end{aligned} \quad (6.10)$$

où l'indice d désigne les termes relatifs à la partie droite du système et $H_{int,bd \leftrightarrow bd}$ le terme d'interaction entre le bloc ajouté à gauche et celui ajouté à droite. L'espace de Hilbert associé, de dimension $m^2 n^2$, s'écrit

$$\{|\phi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \otimes |\phi_i\rangle\}$$

Grâce à la connaissance de l'état fondamental $|\Psi_0\rangle$ du système total (obtenu généralement en appliquant l'algorithme de Lanczos), nous sommes en mesure d'en déduire la matrice de densité du système total

$$\rho_{\text{total}} = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| \quad (6.11)$$

La matrice de densité pour la partie gauche se déduit de ρ_{total} en prenant la trace partielle de cette dernière sur l'espace associé à la partie droite du système

$$\rho_g = \text{Tr}_d(\rho_{\text{total}}) \quad (6.12)$$

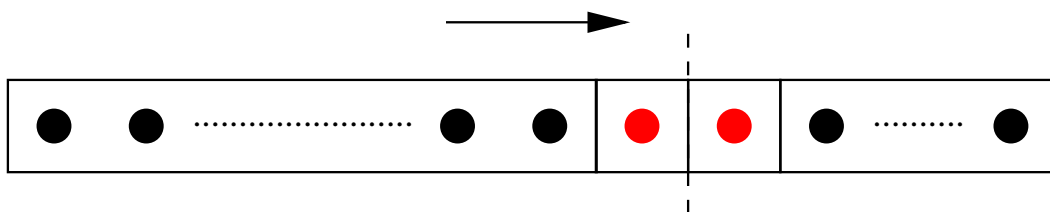
Une fois diagonalisée, nous obtenons une base de l'espace associée aux $i + 1$ sites de gauche que nous noterons $\{|l\rangle\}$ avec $l = 1, \dots, mn$. La valeur propre associée au vecteur $|l\rangle$ est notée λ_l et les indices sont choisis de telle manière que $\lambda_{l+1} < \lambda_l$.

En appliquant la prescription proposée par White, nous conservons uniquement les m premiers états $|1\rangle, \dots, |m\rangle$. Nous obtenons ainsi un système effectif pour $i + 1$ blocs, décrit par m états

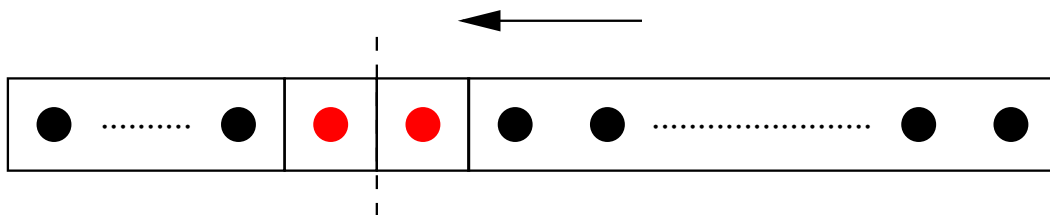


En général, nous sommes intéressés par un certain nombre de mesures d'observables \mathcal{O}_k . Il est ainsi nécessaire à chaque itération, de transformer chacun de ces opérateurs de la base décrivant les i blocs à celle décrivant les $i + 1$ blocs.

L'algorithme que nous venons de décrire est appelé algorithme infini : à chaque itération, un bloc est ajouté. Une fois que nous avons atteint la taille du système requise, il est en général souhaitable d'améliorer la convergence des valeurs mesurées en appliquant une autre variante du DMRG appelée algorithme fini. Cette fois-ci, la taille totale du système est constante ($2N + 2$ blocs). Une première passe consiste à faire croître la partie gauche du système jusqu'à la taille limite.



Ensuite, nous affinons la précision des différentes grandeurs pour chacun des systèmes effectifs en faisant décroître la partie gauche et en réévaluant le système effectif à chaque itération



Cette procédure (croissance puis décroissance du système de gauche) est répétée autant de fois qu'il est nécessaire pour faire converger les différentes grandeurs à évaluer.

Supposons que nous ayons appliqué le DMRG à un problème concret. La question qui vient naturellement à l'esprit est de savoir si les grandeurs calculées dans le cas du système effectif représentent correctement le système original. En d'autres termes, il est important de connaître l'erreur introduite par la troncation de l'espace de Hilbert. Ce paragraphe étant à

but introductif, nous laissons le lecteur intéressé consulter [11] pour une présentation détaillée, ne mentionnant ici que les deux points les plus simples.

Pour la troncation, nous avons évalué les valeurs propres de la matrice de densité associée au système de gauche. Les propriétés de la matrice de densité impliquent un certain nombre de relations pour les λ_l

$$\sum_{l=1}^{mn} \lambda_l = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_l \geq 0 \quad (6.13)$$

Ainsi une bonne estimation de l'erreur nous est donnée par la différence entre la somme des valeurs propres et la somme tronquée.

$$\epsilon_1 = 1 - \sum_{l=1}^m \lambda_l \quad (6.14)$$

Soulignons qu'il s'agit d'un calcul nous donnant l'erreur commise lors d'une itération. Même si c'est un critère nécessaire pour vérifier par exemple que le nombre d'états conservés n'est pas trop faible, il ne nous donne aucune information sur l'erreur commise en ne tenant pas compte des états $m+1, \dots, mn$ pour les prochaines itérations. Il est possible de donner une estimation de la cohérence entre une itération et la suivante grâce à l'erreur de pertinence dont nous ne donnerons pas le détail ici.

Une manière de s'assurer que nous avons convergé vers les bonnes valeurs consiste à regarder les variations de ces dernières en fonction du nombre d'états conservés. Pour un nombre de blocs donné, nous pouvons ainsi connaître le nombre minimum m pour obtenir la précision voulue.

6.2.3 Succès et limites du DMRG

L'un des premiers succès de l'algorithme du DMRG fut le calcul de la valeur du gap pour la chaîne de spin 1. White et Huse [8] obtinrent cette valeur avec une précision dépassant toutes celles atteintes jusqu'alors. Depuis, le DMRG ou sa variante en température finie le TMRG (s'appuyant sur la matrice de transfert) n'a cessé d'apporter de nouveaux résultats dans divers domaines. L'article de Hallberg [9] dresse le panorama des applications existantes. Cela va des systèmes quantiques à une dimension (chaînes de spins, systèmes fermioniques et bosoniques,...) jusqu'à des applications plus exotiques à la physique nucléaire et à la chromodynamique quantique, en passant par des systèmes classiques à deux dimensions.

La seule ombre au tableau concerne les systèmes quantiques à deux dimensions. La précision atteinte lors de l'application du DMRG à de tels problèmes n'est en général pas celle escomptée. L'une des principales difficultés qui semble apparaître, est la manière dont nous devons faire croître le système.

Heureusement pour nous, l'effet Hall quantique fractionnaire comme nous le verrons dans la section suivante, rentre dans le cas des systèmes quantiques à une dimension. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices, nous allons pouvoir appliquer le DMRG.

6.3 Effet Hall quantique fractionnaire

6.3.1 Description du phénomène

Avant de nous intéresser à l'effet Hall quantique fractionnaire, commençons par quelques rappels sur les électrons libres astreints à se déplacer dans un plan et soumis à un champ

magnétique. Dans un premier temps, faisons abstraction du spin des électrons. Le spectre d'un électron est alors composé des niveaux de Landau indicés par N . L'énergie associée à chaque niveau est celle d'un oscillateur harmonique

$$E_N = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c \quad (6.15)$$

où $\omega_c = \frac{eB}{m^*c}$ est la pulsation synchrotron, B le champ magnétique appliqué et m^* la masse effective de l'électron dans le matériau considéré.

Le calcul de la dégénérescence des niveaux de Landau nous indique que dans la limite thermodynamique, il ne peut y avoir plus de $(2\pi l^2)^{-1}$ électrons dans un état donné par unité de surface, avec l la longueur magnétique définie par

$$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \quad (6.16)$$

Il est alors pratique de définir le taux de remplissage ν comme le rapport entre la densité par unité de surface n d'électrons

$$\nu = 2\pi l^2 n \quad (6.17)$$

En tenant compte du spin, la dégénérescence associée à ce dernier est levée par effet Zeeman. La valeur de ν nous renseigne sur les niveaux occupés. Suivant le rapport entre l'énergie synchrotron $\hbar\omega_c$ et l'énergie Zeeman ΔE_Z , $0 \leq \nu \leq 1$ correspond à l'occupation du niveau $N = 0$ avec des électrons ayant un spin up, $1 \leq \nu \leq 2$ à l'occupation du niveau $N = 0$ avec des électrons ayant un spin down si $\hbar\omega_c > \Delta E_Z$ ou à l'occupation du niveau $N = 1$ avec des électrons ayant un spin up si $\hbar\omega_c < \Delta E_Z$.

Pour une description plus détaillée sur les niveaux de Landau mais aussi sur l'effet Hall quantique entier et fractionnaire, nous conseillons fortement la lecture du cours [12].

Peu de temps après la découverte de l'effet Hall quantique entier (que nous avons décrit au paragraphe 5.1), Tsui, Stormer et Gossard mirent en évidence expérimentalement [13] l'apparition de plateaux pour des valeurs du taux de remplissage ν inférieures à un. La transition entre plateaux s'effectue pour des valeurs fractionnaires de ν .

Dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire et contrairement au régime de l'effet Hall quantique entier, ce sont les interactions entre électrons et non l'interaction avec le désordre qui dominent la physique du système. L'apparition des transitions pour des valeurs fractionnaires de ν est interprétée comme un effet Hall quantique entier pour les excitations du liquide quantique formé par les électrons en interaction, ces excitations (quasi-électrons ou quasi-trous) portant une charge électrique fractionnaire et obéissant à une statistique fractionnaire [10].

Dans la suite, nous n'aurons pas besoin d'entrer dans les détails de la théorie des quasi-particules. Nous nous contenterons de l'hypothèse de base du régime fractionnaire : nous négligerons le désordre et ne tiendrons compte que de l'interaction entre les électrons.

6.3.2 Modélisation

Le but de ce paragraphe est d'esquisser la technique permettant de passer du modèle à un système qui puisse être traité par le DMRG. Nous verrons comment arriver à ce résultat dans le cas simple où le champ magnétique est suffisamment fort pour que les électrons soient polarisés et dans le niveau de Landau le plus bas. Notre présentation s'inspirera de [14].

Considérons N électrons contraints à se déplacer dans un plan $x - y$, soumis à un fort champ magnétique B et en interaction. L'hamiltonien du système s'écrit

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \left((P_{xi} + eA_x)^2 + (P_{yi} + eA_y)^2 \right) + \sum_{i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (6.18)$$

où le potentiel d'interaction entre les électrons est le potentiel de Coulomb

$$V(\vec{r}) = \frac{e^2}{\epsilon |\vec{r}|} \quad (6.19)$$

Comme nous l'avons annoncé, nous ne tenons pas compte du spin des fermions et nous supposons que les électrons sont dans le niveau de Landau le plus bas. Ainsi dans la jauge de Landau définie par

$$A_x = 0 \quad \text{et} \quad A_y = Bx \quad (6.20)$$

la fonction d'onde d'un électron pour un système infini peut s'écrire

$$\Psi_k = e^{iky} e^{-\frac{(x - kl^2)^2}{2l^2}} \quad (6.21)$$

où l est la longueur d'onde magnétique et k est l'impulsion suivant la direction y .

Concrètement, nous sommes amenés à considérer un système de taille finie. Nous notons a et b les dimensions suivant les directions x et y . Pour des éviter des problèmes liés aux bords, nous utilisons les conditions périodiques suivant les deux directions. Pour la direction y , ceci nous impose que la quantification de l'impulsion soit $k = \frac{2\pi}{b}j$ avec $j \in \mathbb{Z}$. Regardons maintenant les conséquences de la périodicité suivant x . La version périodique de (6.21) nous est donnée par

$$\Psi_k = \left(\frac{1}{b\sqrt{\pi}l} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iky} e^{-\frac{(x - kl^2 - ma)^2}{2l^2}} \quad (6.22)$$

Pour le potentiel, il faut maintenant tenir compte de l'interaction avec les charges images. Ainsi le potentiel (6.19) devient

$$V(\vec{r}) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \frac{e^2}{\epsilon |\vec{r} + k_1 a \vec{u}_x + k_2 b \vec{u}_y|} \quad (6.23)$$

et l'hamiltonien se met sous la forme

$$H = S \sum_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \sum_{k_4} A_{k_1 k_2 k_3 k_4} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3} a_{k_4} \quad (6.24)$$

avec

$$A_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \frac{e^2}{2bc} \delta'_{k_1 + k_2, k_3 + k_4} \sum_{\vec{q} \neq \vec{0}} \delta'_{k_3 - k_2, q_y} \frac{1}{\sqrt{q_x^2 + \lambda^2 q_y^2}} \exp \left(-\frac{\pi}{m} (\lambda^{-1} q_x^2 + \lambda q_y^2) \right) \quad (6.25)$$

$$\times \exp \left(-i \left(k_1 - k_3 \frac{2\pi}{m} q_x \right) \right) \quad (6.26)$$

où $\lambda = a/b$ est le rapport d'aspect de la géométrie du système.

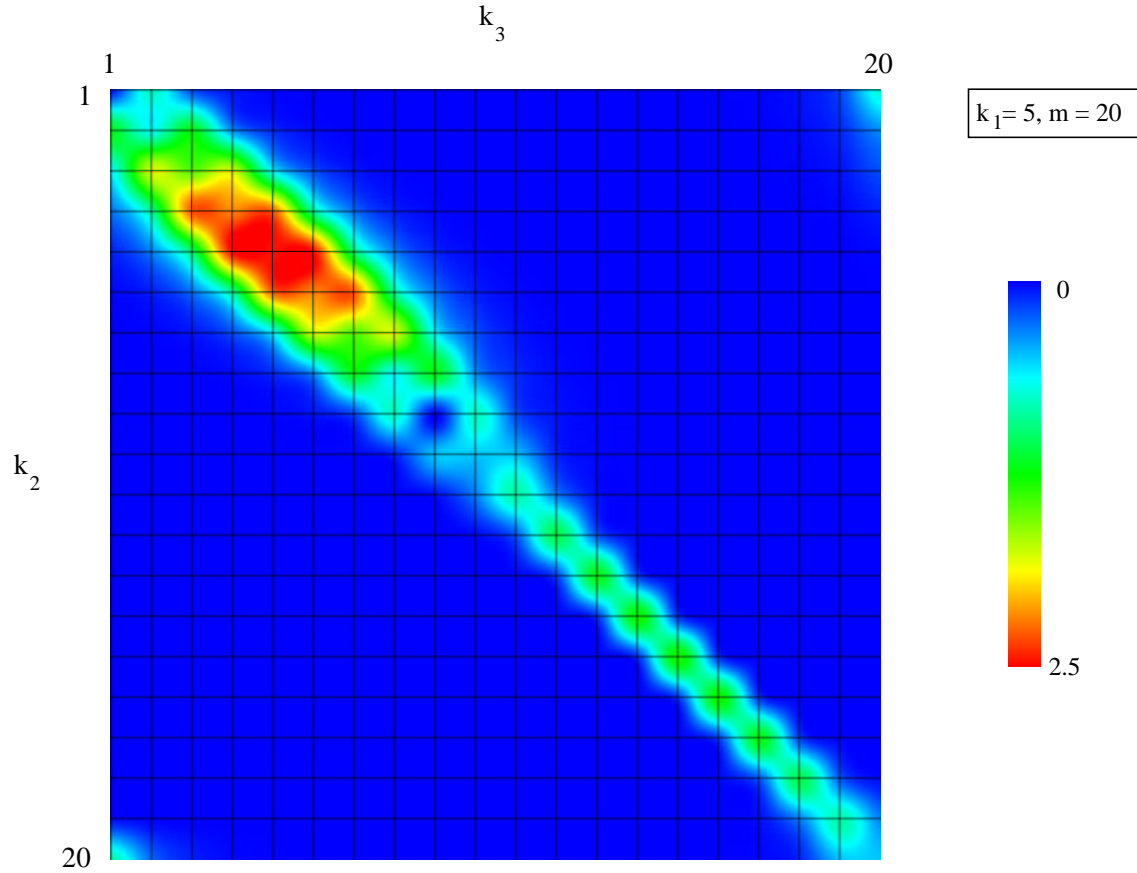
Le facteur S correspond à l'énergie de Coulomb du cristal de Wigner pour un réseau rectangulaire. Il est donné par la formule suivante

$$S = -\frac{e^2}{\epsilon\sqrt{ab}} \left(2 - \sum_{\vec{q} \neq \vec{0}} \varphi_{-\frac{1}{2}} \left(\pi (\lambda^{-1} q_x^2 + \lambda q_y^2) \right) \right) \quad (6.27)$$

avec

$$\varphi_n(z) = \int_1^\infty t^n e^{-zt} dt$$

Tel que nous l'avons écrit, le terme d'interaction dans (6.24) n'est pas local. Il n'est donc pas possible en l'état d'utiliser le DMRG sur ce système. Regardons de plus près comment se comporte le coefficient d'interaction $A_{k_1 k_2 k_3 k_4}$. Compte-tenu de la présence de gaussienne, nous aurions tendance à croire que les termes où les coefficients $k_3 - k_2$ et $k_1 - k_3$ sont proches de zéro, vont dominer. L'évaluation numérique de (6.25) vient confirmer ce raisonnement qualitatif. Le graphique ci-dessous représente $A_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ pour $k_1 = 5$ et $m = 20$ pour k_2 et k_3 variant entre 1 et 20



Comme nous pouvons le constater, nous pouvons uniquement considérer en première approximation que seuls quelques termes vont avoir une contribution significative

$$\begin{aligned} k_2 &= k_1 \quad \text{et} \quad k_3 = k_1 \\ k_2 &= k_1 \pm 1 \quad \text{et} \quad k_3 = k_1 \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} k_2 = k_1 \quad \text{et} \quad k_3 = k_1 \pm 1 \\ k_2 = k_1 \pm 1 \quad \text{et} \quad k_3 = k_1 \pm 1 \end{aligned}$$

En tenant compte de la conservation de l'impulsion et des règles d'anticommutation des opérateurs, nous pouvons ainsi réécrire (6.24) sous la forme

$$H \sim S \sum_k a_k^\dagger a_k + A \frac{1}{2} \sum_k \left(a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger a_k a_{k+1} + a_k^\dagger a_{k-1}^\dagger a_k a_{k-1} \right) \quad (6.29)$$

en ayant posé

$$A = A_{k \ k+1 \ k \ k+1} - A_{k \ k+1 \ k+1 \ k} = A_{k \ k-1 \ k \ k-1} - A_{k \ k-1 \ k-1 \ k} \quad (6.30)$$

Au final, nous nous sommes ramenés, moyennant une approximation justifiée numériquement, à un problème de chaîne fermionique unidimensionnelle avec une interaction locale sur lequel il est par conséquent possible d'appliquer le DMRG.

6.4 Conclusions

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, il existe un certain nombre de sujets "chauds" dans le domaine de l'effet Hall quantique fractionnaire. Reprenons le problème de la polarisation partielle dans le cas $\nu = 2/3$. Pour pouvoir observer une polarisation partielle $\mathcal{P} = +3/4$, il est nécessaire d'avoir au minimum de 24 électrons. En effet, pour obtenir une polarisation de $3/4$, il faut que le nombre total n d'électrons soit égal à huit fois celui des électrons ayant un spin down. Pour pouvoir regarder la convergence en fonction de n , il faut au moins trois valeurs et par conséquent $n \geq 24$. Avec un taux de remplissage de $\nu = 2/3$, la taille de l'espace de Hilbert est de l'ordre de 10^9 . Les méthodes de diagonalisation exacte telles que celles employées par Haldane, Yang et Rezahine dans [16] par exemple, ne permettent pas d'atteindre plus de 10 électrons dans le meilleur des cas. Seul un algorithme comme le DMRG peut venir à notre secours dans un tel cas.

Même si au stade actuel du développement du programme (cf annexe A), il n'est pas encore possible d'obtenir de résultats sur ce problème, l'utilisation du DMRG semble être une voie prometteuse. Pour preuve, l'algorithme a déjà été employé avec succès par Yoshioka et Shibata [15] à l'étude du diagramme de phase pour le niveau de Landau $N=2$. C'est donc sous des cieux favorables que débutent ces nouvelles recherches.

Annexe A

Architecture du programme

Cette annexe a pour vocation d'exposer la façon dont nous avons envisagé la conception du programme. Elle sera donc assez technique et intéressera plutôt les lecteurs soucieux de connaître l'architecture que nous avons développée. Bien que des notions de langages objets peuvent aider à la compréhension, nous nous efforcerons de limiter l'usage de termes techniques.

L'implémentation de l'algorithme DMRG n'est pas aisée si nous souhaitons obtenir des temps d'exécution raisonnables. L'investissement en temps humain est important. Développer un programme pour un problème physique bien particulier comme celui de l'effet Hall quantique fractionnaire, conduit à se poser la question de la réutilisation de ce travail par la suite. Le DMRG pouvant s'appliquer à d'autres domaines, la tentation de créer un programme plus général est donc grande.

Le surcoût à payer pour une telle entreprise n'est pas négligeable. Le nombre de lignes de code croît alors énormément, impliquant une maintenance plus difficile. Le compromis entre l'optimisation et la généralité nécessite un effort supplémentaire. Mais la partie la plus délicate reste sans aucun doute le besoin d'avoir une vision d'ensemble des problèmes que nous souhaitons traiter et d'une structure suffisamment souple pour que chaque nouvelle étude soit équivalente à l'ajout de fonctionnalité et non à un changement en profondeur du programme.

Compte-tenu de ces diverses contraintes, le choix du langage C++ semble être le plus judicieux. Sa conception objet s'inscrit exactement dans le cadre de notre philosophie et la vitesse du langage C sous-jacent nous assure des temps d'exécution optimaux lors des calculs algébriques.

Avant d'aller plus loin, nous devons introduire quelques notions propres aux langages orientés objet. La plus importante est celle de classe. Concrètement, ce terme dissimule la notion de regroupement dans une même entité, une structure de données (des nombres entiers, réels, des chaînes de caractère ...) et des méthodes (ou fonctions) pouvant être appliquées à ces données. Pour donner corps à cette notion, nous pouvons considérer l'exemple d'une classe vecteur de réels. La structure de données est un tableau de nombres réels et un nombre entier donnant la dimension du vecteur. Parmi les différentes méthodes que nous pouvons adjoindre à cette structure, nous retrouvons la connaissance de la dimension du vecteur, l'addition de deux vecteurs, le calcul de la norme, etc...

Encore plus fort, la notion de classe abstraite qui permet de donner une interface commune à plusieurs classes (on dit alors que ces dernières héritent de la classe abstraite). Reprenons notre exemple sur les vecteurs et supposons que nous ayons à travailler avec des vecteurs réels ou complexes. Nous pouvons écrire deux classes et deux programmes utilisant le même algorithme mais l'une ou l'autre des classes. Cette perte de temps que constitue l'écriture

de deux codes similaires peut être évitée si l'algorithme ne fait appel qu'à des méthodes communes aux deux classes. Dans ce cas, le programme fera appel à une classe abstraite vecteur, décrivant les méthodes communes aux classes vecteurs réels et complexes (comme le calcul de la norme par exemple). Il suffit ensuite d'indiquer que les deux classes héritent de la classe abstraite vecteur pour pouvoir utiliser indifféremment l'une ou l'autre.

Afin de simplifier l'écriture de cette annexe, nous allons introduire un dernier terme technique. Nous parlerons de package (préférant cet anglicisme à la traduction française paquetage peu usitée) pour désigner l'ensemble formé par une classe abstraite et les classes héritant de cette dernière.

Un premier groupe de packages fournit toutes les structures mathématiques. Ceci inclut les vecteurs, les matrices et les tenseurs. Afin d'améliorer les performances, le choix a été fait de multiplier le nombre de classes pour pouvoir profiter au mieux des propriétés de chaque sous-ensemble d'objets mathématiques. A titre d'exemple, le package matrice regroupe à l'heure actuelle, plus de dix classes allant des matrices complexes génériques aux matrices bloc-diagonales. A côté de ce premier groupe, nous avons un certain nombre de packages associés aux entrées-sorties et autres outils informatiques.

Rappelons que notre objectif est de découpler la physique des algorithmes permettant l'évaluation de diverses grandeurs. Le coeur du programme est donc à l'image de cette idée. Il est constitué de deux groupes de packages. Le premier concerne les différents algorithmes où nous retrouvons diverses variantes du DMRG et de l'algorithme de Lanczos. Il est tout à fait envisageable d'adjoindre par la suite d'autres techniques comme celle de Monte-Carlo.

Le second groupe de packages sert à décrire la physique du modèle. D'un point de vue théorique, quels sont les objets dont nous avons besoin pour cette description ? Il est nécessaire de connaître l'hamiltonien du système ainsi que l'espace de Hilbert associé. Si nous souhaitons mesurer d'autres grandeurs que l'énergie, il nous faut connaître les observables physiques associées. A priori, seuls trois packages seraient utiles pour déterminer les quantités recherchées. En pratique, nous serions alors très vite limités dans la taille des systèmes étudiés si nous n'incluons pas les symétries. C'est pourquoi nous devons introduire les nombres quantiques pour pouvoir réduire la taille des espaces sur lesquels les algorithmes de résolution vont être appliqués. Le dernier point qu'il nous faut prendre en compte est celui de l'interaction entre systèmes. Nous devons être en mesure de les faire interagir pour pouvoir en particulier appliquer le DMRG. Ainsi, grâce à ces cinq packages, nous sommes en mesure de traiter un grand nombre de systèmes quantiques.

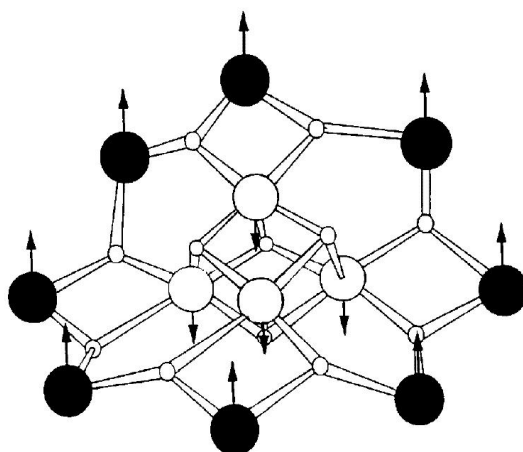
Au moment de la rédaction de cette thèse, ce projet n'est pas encore au stade où une application à l'effet Hall quantique fractionnaire est possible. Malgré cela, le programme est déjà composé de plus de 50000 lignes de code réparties dans plus de 70 classes. Ces dernières ont été testées et un certain nombre de résultats physiques concernant des systèmes de spins ou de fermions plus simples ont pu être reproduits. Même si le temps de développement est plus important compte-tenu de notre ambition, la perspective d'un outil permettant de couvrir un vaste domaine de problèmes physiques est excitant. Pour preuve que la modularité recherchée n'est pas un vain espoir, nous présentons dans l'annexe B, un exemple d'application de notre programme à une étude des constantes de couplage d'un système de spin.

Annexe B

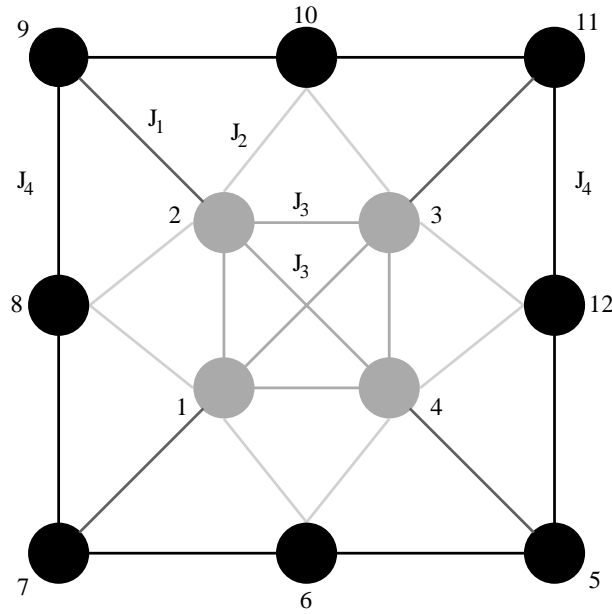
Constantes de couplage de $Mn_{12}Ac$

Même si nous n'avons pas encore appliqué les outils développés pour le DMRG au problème de l'effet Hall quantique, nous avons malgré tout exploité une partie du code pour résoudre un autre problème physique.

Nous nous sommes intéressés aux nanoaimants moléculaires qui, à cause d'un temps de relaxation très grand (à basse température) de leur spin effectif, semblent être une voie intéressante pour le stockage d'information. Nous avons regardé plus particulièrement la molécule $Mn_{12}Ac$ [17] représentée ci-dessous



La molécule magnétique Mn_{12} possède quatre ions Mn^{4+} dotés d'un spin $S = 3/2$ que nous appellerons $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_4$ et huit ions Mn^{3+} ayant un spin $S = 2$ que nous noterons $\mathbf{S}_5, \dots, \mathbf{S}_{12}$. Les principales interactions entre spins dont nous tiendrons compte, sont représentées sur le schéma ci-dessous



Une bonne approximation consiste à ignorer les effets d'anisotropie. L'hamiltonien du système peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 H = & J_1 \{ \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_7 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_5 \} \\
 & + J_2 \{ \mathbf{S}_6 \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4) + \mathbf{S}_8 \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + \mathbf{S}_{10} \cdot (\mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) + \mathbf{S}_{12} \cdot (\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_4) \} \\
 & + J_3 \{ \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_4 \} \\
 & + J_4 \{ \mathbf{S}_5 \cdot \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_6 \cdot \mathbf{S}_7 + \mathbf{S}_7 \cdot \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_8 \cdot \mathbf{S}_9 \\
 & \quad + \mathbf{S}_9 \cdot \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{10} \cdot \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{11} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{S}_5 \}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Notons qu'avec cet hamiltonien, S_z est un bon nombre quantique et pourra nous servir à subdiviser l'espace de Hilbert.

Le but est de déterminer les constantes de couplage du modèle en nous servant des données expérimentales disponibles. Numériquement, le problème est non-trivial puisque la taille de l'espace de Hilbert et de l'ordre de 10^8 , ce qui rend impossible les méthodes brutes telles qu'une diagonalisation exacte sans tenir compte des symétries. Les précédents travaux [18, 21, 22] étaient basés sur l'hypothèse qu'une ou deux constantes de couplage étaient largement plus importantes. Dans [18] par exemple, la constante de couplage J_1 était considérée comme dominante. Ainsi en première approximation, le système se ramenait à un système de quatre dimère $Mn^{3+} - Mn^{4+}$ de spin $S = 1/2$ et de quatre ions Mn^{3+} isolés. Un calcul perturbatif était ensuite mené pour en déduire les autres constantes de couplage à l'aide des contraintes expérimentales. Comme nous le verrons par la suite, l'hypothèse J_1 comme valeur dominante semble être contredite par le calcul numérique exact que nous proposons.

Comme nous l'avons déjà écrit précédemment, il existe un certain nombre de résultats expérimentaux que le modèle doit reproduire. Nous savons tout d'abord que le fondamental du système se trouve dans le secteur $S = 10$. Plusieurs expériences, dont la plus précise est celle effectuée par de la diffusion de neutron [19], mettent en évidence l'existence d'états excités proches du fondamental. Nous disposons en particulier de l'écart entre le fondamental du secteur $S = 10$ et le premier état excité du secteur $S = 9$. La valeur de ce gap est de

$$\Delta = E_{1, S_z=9} - E_{0, S_z=10} = 23.5T \tag{B.2}$$

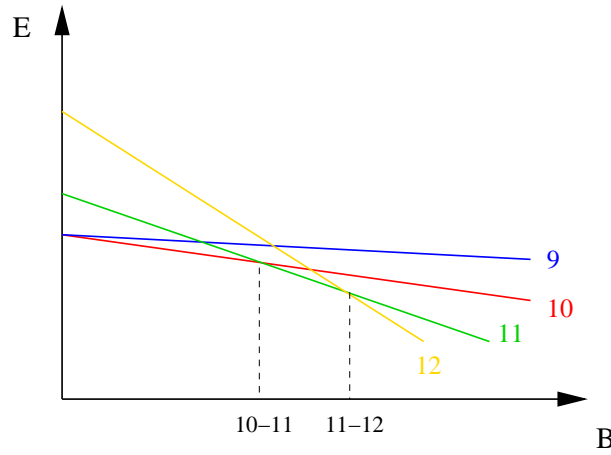
En se basant uniquement sur ces hypothèses, un premier jeu de valeurs fut proposé par [23]

$$\begin{aligned} J_1 &= 144T & ; & & J_2 &= 57T \\ J_3 &= 57T & ; & & J_4 &= -43T \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

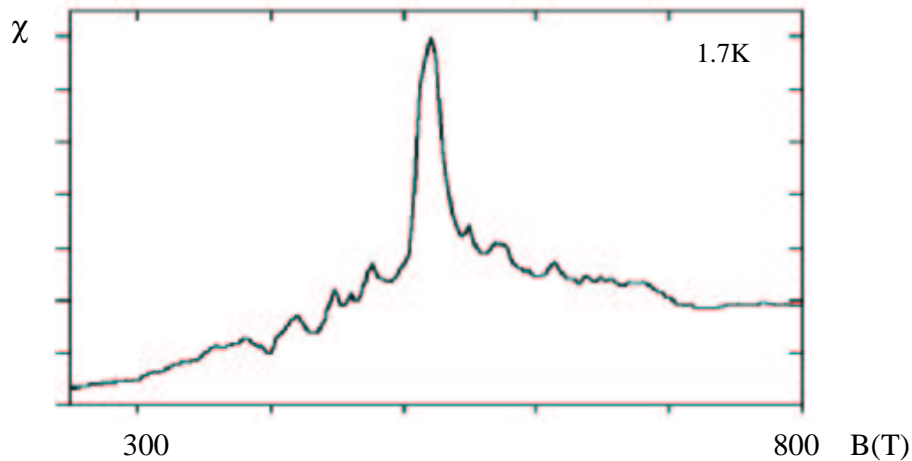
Récemment, la courbe d'aimantation pour $Mn_{12}Ac$ fut obtenue [20] en utilisant la méthode de compression explosive du flux magnétique pour pouvoir accéder à de forts champs magnétiques (jusqu'à $800T$). Compte tenu de l'invariance par rotation de l'hamiltonien, la variation de l'énergie du fondamental dans chaque secteur S_z donné, en fonction du champ magnétique supposé suivant z est tout simplement linéaire

$$E_{0,S_z}(B) = E_{0,S_z}(B=0) - g\mu_B S_z B \quad (\text{B.4})$$

avec $E_{0,S_z}(B)$ la valeur du fondamental dans le secteur S_z . Si nous représentons sur un graphique la variation du fondamental de chaque secteur en fonction de B , nous obtenons (en tenant compte du fait que le fondamental du système est à $S = 10$ en l'absence de champ magnétique)



Lorsque deux niveaux se croisent, nous avons changement du fondamental du système. Pour la courbe d'aimantation, nous observons donc des plateaux et des sauts pour ces valeurs critiques du champ où nous avons un croisement de niveaux. Voici la courbe expérimentale donnée dans [20] de la dérivée de l'aimantation.



Aux sauts de l'aimantation correspondent ici des pics. Le premier de ces pics apparaît pour une valeur du champ $B_{10 \rightarrow 11} = 382T$ et correspond à la transition $S_z = 10 \rightarrow S_z = 11$. Nous avons ensuite une série de trois autres pics plutôt bien résolus $B_{11 \rightarrow 12} = 416T$, $B_{12 \rightarrow 13} = 448T$ et $B_{13 \rightarrow 14} = 475T$. Les champs de transition se déduisent de (B.4)

$$B_{S_z \rightarrow S_z+1} = \frac{1}{g\mu_B} (E_{0,S_z+1}(B=0) - E_{0,S_z}(B=0)) \quad (B.5)$$

Nous avons utilisé une partie du programme décrit dans l'annexe A pour calculer le fondamental dans chaque secteur S_z donné. L'algorithme employé est celui de Lánczos qui nous permet d'obtenir E_{0,S_z} et $E_{1,S_z=9}$ avec une précision de 10^{-10} en moins de 10 minutes sur un Athlon 1.4 GHz.

Le spectre théorique calculé à partir des valeurs (B.3) des constantes de couplage est très éloigné du spectre expérimental. Nous obtenons en effet $B_{10 \rightarrow 11} = 192T$, $B_{11 \rightarrow 12} = 239T$, $B_{12 \rightarrow 13} = 356T$ et $B_{13 \rightarrow 14} = 406T$.

Pour parcourir l'espace des constantes de couplage, nous pouvons fixer une des constantes de couplage (l'hamiltonien (B.1) étant défini à une constante multiplicative près). Ceci permet de diminuer d'une unité la dimension de cet espace et revient à choisir la normalisation telle qu'un des champs critiques (par exemple $B_{10 \rightarrow 11}$) soit fixé. L'erreur par rapport au spectre expérimental est évaluée par la quantité

$$\epsilon = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{B_{10+i \rightarrow 11+i}^{exp} - B_{10+i \rightarrow 11+i}^{theo}}{B_{10+i \rightarrow 11+i}^{exp}} \right)^2 \quad (B.6)$$

Une fois que nous avons trouvé une région intéressante, nous agissons sur les quatre constantes pour ajuster le spectre et le gap (la région est bien sûr telle que $S = 10$ soit le fondamental). Il s'est révélé lors de ces recherches que le spectre dépendait essentiellement de J_1 et J_2 alors que le gap est plus sensible à J_3 et J_4 comme le montrent les figures (B.1-B.4) ci-après.

Au final nous obtenons le jeu de constantes de couplage suivant

$$\begin{aligned} J_1 &\sim 89T & J_2 &\sim 88T \\ J_3 &\sim 0T & J_4 &\sim 17T \end{aligned} \quad (B.7)$$

Le gap est alors de $23.5K$ et le spectre donné dans le tableau ci-dessous reproduit assez bien les valeurs expérimentales.

S_z	Energie (T)	Champs critique (T)
10	-3142.8	383.6
11	-2759.2	413.5
12	-2345.7	445.4
13	-1900.3	478.6
14	-1421.7	513.6
15	-908.1	549.4
16	-358.7	585.9
17	227.2	623.0
18	850.2	660.9
19	1511.1	698.3
20	2209.4	735.5
21	2944.9	764.7
22	3709.6	

Compte tenu de la précision sur les mesures, nos valeurs des J ne sont définies qu'à $5T$ près. Notons que le pic central dans le spectre de [20] situé vers $530T$ généralement associé aux deux transitions $14 \rightarrow 15$ et $15 \rightarrow 16$ est aussi reproduit par la moyenne des deux champs critiques correspondants.

En plus de l'intérêt physique, ces résultats montrent aussi l'importance d'un programme modulaire. Même si l'écriture est plus ardue et plus longue, le fait de pouvoir avec un même outil regarder des problèmes aussi différents que celui-ci et l'effet Hall fractionnaire, est un avantage considérable.

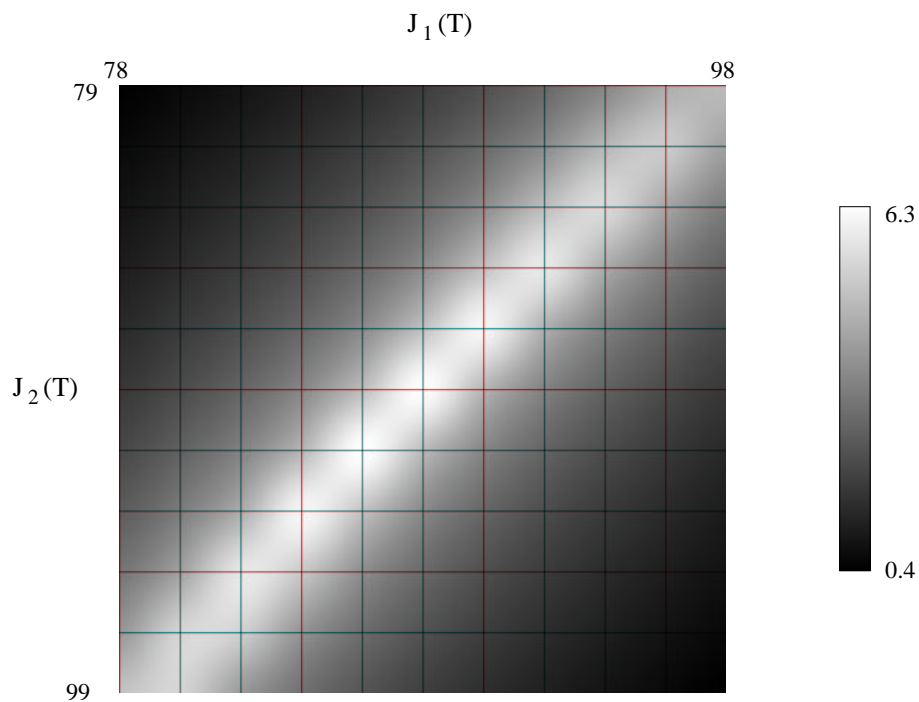


FIG. B.1 – Variation de ϵ en fonction de J_1 et J_2 . Les autres constantes de couplage sont $J_3 = -0.5$ T, $J_4 = 16.8$ T. L'échelle de couleur est proportionnelle à $\log(\epsilon \times 10^4)$.

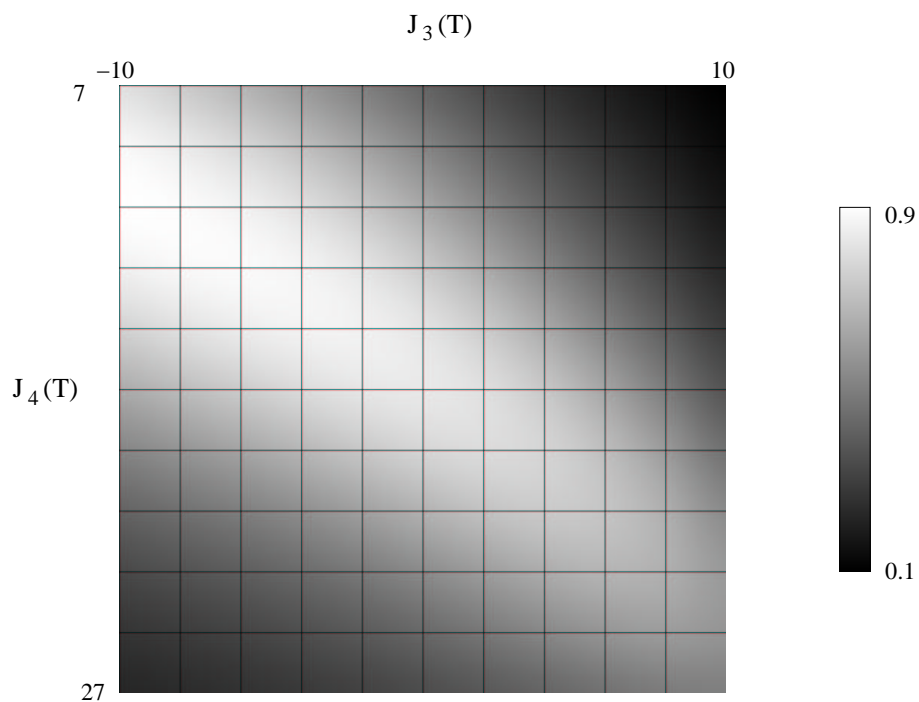


FIG. B.2 – Variation de ϵ en fonction de J_3 et J_4 . Les autres constantes de couplage sont $J_1 = 88.9$ T, $J_2 = 88$ T. L'échelle de couleur est proportionnelle à $2/(1 + \epsilon \times 10^4)$.

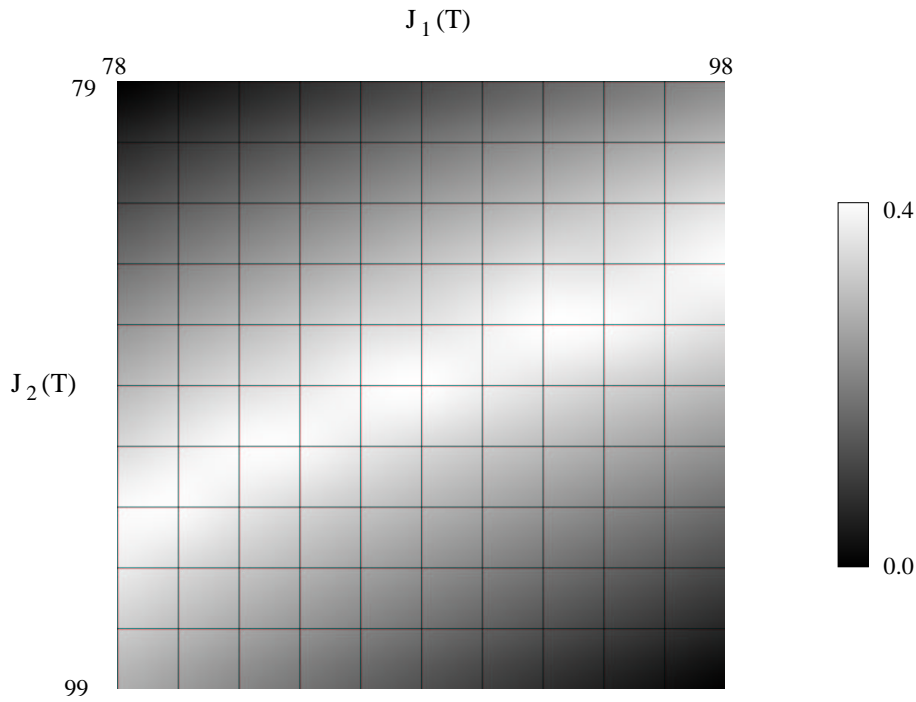


FIG. B.3 – Variation du gap en fonction de J_1 et J_2 . Les autres constantes de couplage sont $J_3 = -0.5$ T, $J_4 = 16.8$ T. L'échelle de couleur est proportionnelle à $|\Delta - 23.5/23.5|$.

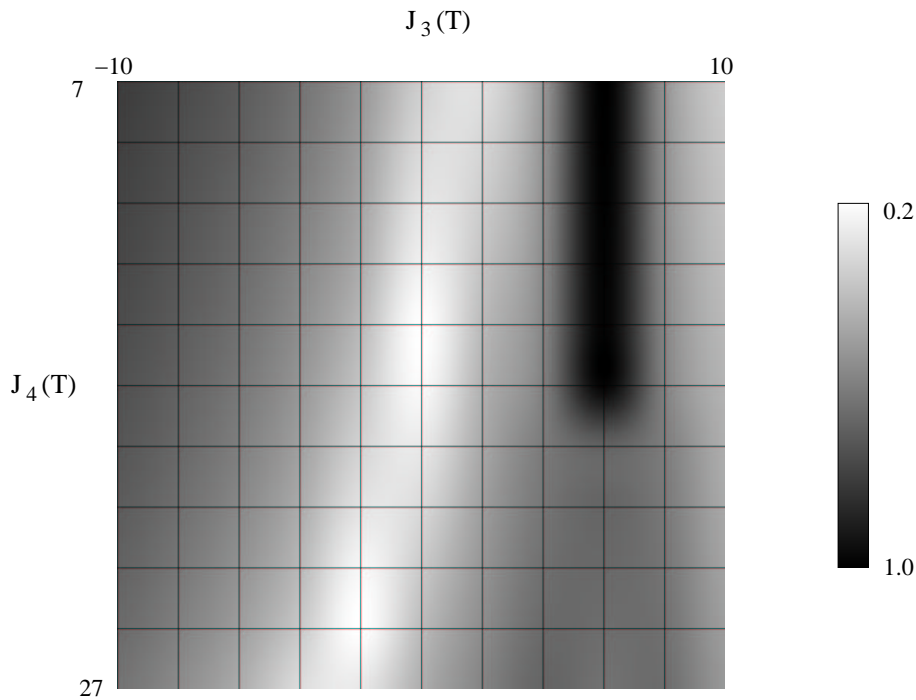


FIG. B.4 – Variation du gap en fonction de J_3 et J_4 . Les autres constantes de couplage sont $J_1 = 88.9$ T, $J_2 = 88$ T. L'échelle de couleur est proportionnelle à $1/1 + |\Delta - 23.5/23.5|$.

Bibliographie

- [1] G. Fano, F. Ortolani et E. Colombo, Phys. Rev. B34 (1986) 2670.
- [2] I.V. Kukushkin, K.V. Klitzing et K. Eberl, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 3665.
- [3] N. Freytag, Y. Tokunaga, M. Horvatic, C. Berthier, M. Shayegan et L. Levy, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 136801.
- [4] C. Lanczos, J. Res. Natl. Bur. Stand. 45 (1950) 255.
- [5] S.R. White et R.M Noack, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 3487.
- [6] S.R. White, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 2863.
- [7] S.R. White, Phys. Rev. B48 (1993) 10345.
- [8] S.R. White et D. Huse, Phys. Rev. B48 (1993) 3844.
- [9] K. Hallberg, CRM Proceedings, Springer Montreal (1999).
- [10] R.B Laughlin, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 605.
- [11] U. Schollwöck, *Le groupe de renormalisation numérique dans l'espace réel : application aux chaînes de spin quantiques*, thèse Paris XI Orsay, (1995).
- [12] A.H. MacDonald, *Introduction to the physics of the quantum Hall regime*, Les Houches, Session. LXI (1994).
- [13] D.C Tsui, H.L Stormer et A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. 80 (1983) 1395.
- [14] D. Yoshioka, Phys. Rev B29 (1984) 6833.
- [15] N. Shibata et D. Yoshioka, Phys. Rev. Lett. 86 (2001) 5755.
- [16] F.D.M. Haldane, Yang et E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 5396.
- [17] R. Sessoli, D. Gatteschi, A. Caneschi et M. A. Novak, Nature 365(1993)141.
- [18] R. Sessoli et al., J. Am. Chem. Soc. 115(1993)1804.
- [19] I. Mirebeau et al., Phys. Rev. Lett. 83(1999)628.
- [20] A. A. Mukhin et al., non publié.
- [21] A. L. Barrat, D. Gatteschi et R. Sessoli, Phys. Rev. B56(1997)8192.
- [22] A. K. Zvezdin et A. Popov, JETP 82(1996)1140.
- [23] C. Raghu et al., Phys. Rev. B64(2001)064419.

Solutions exactes de la gravité réduite / Effet Hall quantique de spin.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la gravité en l'absence de matière lorsque la métrique ne dépend que de deux variables. En s'appuyant sur une nouvelle paire de Lax basée sur l'algèbre $sl(2, R)$ affine déformée par un automorphisme d'ordre 2 et l'algèbre de Virasoro, nous obtenons une méthode purement algébrique (sans calcul d'intégrale) pour engendrer l'ensemble des solutions. Les éléments de la métrique sont alors exprimés par des déterminants. Toujours à l'aide de cette paire de Lax, nous étudions la structure symplectique de la théorie. Nous montrons que ce modèle non ultralocal conduit à des équations de Yang-Baxter modifiées ne faisant intervenir que de purs c-nombres. Nous présentons aussi une méthode pour calculer les observables classiques à l'aide de conditions aux limites raisonnables.

Dans la seconde partie, nous nous attachons à regarder l'effet Hall quantique de spin. Nous étudions une généralisation du modèle de Chalker-Coddington en considérant un grand nombre de degrés de liberté de spin possédant une symétrie $SP(2N)$. Nous mettons en évidence une direction dans l'espace des constantes de couplage dite isotrope, qui est préservée par le flot de renormalisation et attractive dans la région des constantes de couplages positives. Nous montrons que le modèle sigma effectif pour cette direction correspond, dans la limite où N est grand, à une théorie massive dans la limite infrarouge.

La dernière partie est dédiée à la présentation de l'application de l'algorithme du groupe de renormalisation numérique utilisant la matrice de densité à l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous présentons l'ensemble des notions de base nécessaires à une telle étude. A titre de complément, nous appliquons une partie des outils numériques développés à la détermination des constantes de couplage de la molécule magnétique $Mn_{12}Ac$.

Exact Solutions of reduced gravity / Quantum Hall spin effect.

The first part is dedicated to the study of gravity in vacuum when the metric depends only of two variables. Using new Lax pair based on $sl(2, R)$ affine twisted algebra by an order 2 automorphism and Virasoro algebra, we obtain a purely algebraic method (without any integral) to generate all solutions. Metric elements are given by formulae involving determinants. With this new Lax pair, we also study the symplectic structure of the theory. Despite the fact that this model is non ultralocal, we deduce pure c-number Yang Baxter modified equations. We describe how to construct classical observables assuming boundary conditions based on physical hypothesis.

The second part deals with the spin quantum Hall effect. We study a generalisation of Chalker-Coddington model, based on a high number of spin degrees of freedom with an $Sp(2N)$ symmetry. We show that there is a direction in coupling constant space, called isotropic direction, preserved by the renormalization flow and attractive in region where coupling constants are positive. We evaluate an effective sigma model for this direction and prove that it corresponds to a massive theory in infrared limit and for large value of N .

Finally, the last part is dedicated to a brief survey of density matrix renormalization group algorithm applied to fractional quantum Hall effect. We give some details about basic notions and technics needed for this study. Moreover, we apply some of the numerical tools developed for the DMRG algorithm to find the coupling constants of the $Mn_{12}Ac$ magnetic molecule.